Editorial / *Editorial* / *Editorial*

DOI: https://doi.org/10.18359/rfcb.7289

Enseñanza de geometría en el plano complejo usando enfoque Steam con pensamiento computacional*

María Isabel Romero Rodríguez[a] ▪ Eduard Leonardo Sierra Ballén[b]

Resumen: El cambio rápido que han traído los avances tecnológicos desde la segunda mitad del siglo xx ha generado la necesidad de tener nuevos enfoques de enseñanza como el Steam y el pensamiento computacional, que permitan lograr mejoras en la experiencia de aprendizaje y potenciar las habilidades de los estudiantes. Se presentan dos casos de aplicación de estos enfoques en el proceso de enseñanza-aprendizaje para estudiar y comprender las regiones en el plano complejo, el cual resulta importante para los estudiantes de ingeniería y ciencias básicas. Las soluciones de problemas provenientes de la física dependen en gran medida de la geometría de la región en la que se busca la solución. Es por esto que representar de manera gráfica la región resulta importante en la formulación tanto del problema como de la solución en sí misma. La visualización de estas regiones no es un ejercicio sencillo, por lo que recurrir al uso de tecnologías en el aula decanta con un doble propósito, por un lado, al requerir lenguaje de programación se genera en los estudiantes el desarrollo de mentalidades analíticas y creativas, siguiendo los parámetros de la lógica computacional, y, por otro lado, facilita la representación gráfica y estética de la región. En el presente artículo enunciamos algunos problemas de regiones en el plano complejo, describiendo tanto su solución analítica como la representación en el plano.

Palabras clave: matemática; educación en ingeniería; variable compleja; Steam; pensamiento computacional; tecnología en el aula

---

* Semillero ApplyMath - Grupo de Investigación en Multimedia (GIM). Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia.

a Docente de tiempo completo de la Universidad Militar Nueva Granada y editora de la Revista de la Facultad de Ciencias Básicas. Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá. Colombia.
Correo electrónico: maria.romeror@unimilitar.edu.co
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2133-6251

b Docente de tiempo completo de la Universidad Militar Nueva Granada. Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá. Colombia.
Correo electrónico: eduard.sierra@unimilitar.edu.co
ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-0319-6227

Geometry Teaching In The Complex Plane Using A Steam Approach With Computational Thinking

Abstract: The rapid change brought about by technological advances since the second half of the 20th century has created the need for new teaching approaches such as Steam and computational thinking, which allow for improvements in the learning experience and enhance students' skills. Two cases of application of these approaches in the teaching-learning process are presented to study and understand regions in the complex plane, which are important for engineering and basic science students. Problem solutions from physics depend largely on the geometry of the region in which the solution is sought. This is why graphically representing the region is important in formulating both the problem and the solution itself. Visualizing these regions is not a simple exercise, so resorting to the use of technology in the classroom serves a dual purpose. On the one hand, by requiring programming language, it fosters the development of analytical and creative mindsets in students, following the parameters of computational logic, and on the other hand, it facilitates the graphical and aesthetic representation of the region. In this article, we outline some problems of regions in the complex plane, describing both their analytical solution and their representation in the plane.

Keywords: Mathematics; Engineering Education; Complex Variable; Steam; Computational Thinking; Classroom Technology

Ensino de geometria no plano complexo usando abordagem Steam com pensamento computacional

Resumo: A rápida mudança trazida pelos avanços tecnológicos desde a segunda metade do século XX gerou a necessidade de novas abordagens de ensino, como o Steam e o pensamento computacional, que permitam melhorias na experiência de aprendizado e potencializem as habilidades dos alunos. São apresentados dois casos de aplicação dessas abordagens no processo de ensino-aprendizagem para estudar e compreender as regiões no plano complexo, o que é importante para estudantes de engenharia e ciências básicas. As soluções de problemas provenientes da física dependem em grande medida da geometria da região em que se busca a solução. Por isso, representar graficamente a região é importante na formulação tanto do problema quanto da solução em si. A visualização dessas regiões não é um exercício simples, então recorrer ao uso de tecnologias na sala de aula tem um duplo propósito: por um lado, ao exigir linguagem de programação, desenvolve nas mentes dos alunos mentalidades analíticas e criativas, seguindo os parâmetros da lógica computacional, e, por outro lado, facilita a representação gráfica e estética da região. Neste artigo, enunciamos alguns problemas de regiões no plano complexo, descrevendo tanto sua solução analítica quanto a representação no plano.

Palavras-chave: matemática; educação em engenharia; variável complexa; Steam; pensamento computacional; tecnologia na sala de aula

Introducción

El proceso de enseñanza-aprendizaje tiene nuevos desafíos desde los últimos años, debido al rápido avance tecnológico que ha experimentado la humanidad a partir de la segunda parte del siglo XX. La emergencia de las tecnologías de la información y el conocimiento (TIC), a mediados de los años setenta, había llegado a los gobiernos y el campo militar; cada vez más industrias y campos de la economía empezaron a migrar al uso masivo de estas tecnologías. Luego, con la baja de costes en los años ochenta, estas tecnologías llegaron a los hogares con los computadores personales. Posteriormente, en los años noventa se ampliaron las redes de comunicaciones de información con la llegada del internet a todos los hogares, y después los teléfonos inteligentes, a finales de la primera década del siglo XXI, crearon una combinación de medios que permiten en la actualidad un acceso a capacidades de cómputo y de disponibilidad de información nunca antes vistas en la humanidad. La educación no ha sido ajena a estos avances; estas tecnologías han modificado las formas de enseñar y de aprender, han creado nuevas tendencias y necesidades de formación más acordes con la época, los cambios sociales y económicos.

Dentro de los cambios en la educación se cuenta con la llegada de recursos digitales en línea, como apoyo a la docencia, la disponibilidad de computadores y dispositivos móviles en el aula, y las tendencias de formación que promueven la necesidad de tener cada vez más persona formadas que puedan responder a los nuevos retos científicos y tecnológicos; en particular, se ha dado alta relevancia y mostrado la urgencia de fortalecer las capacidades de solución de problemas, promoviendo la formación en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas. Este modelo de educación se conoce como STEM [1]. En el mismo sentido, más adelante se reconoció la importancia de incluir el arte en este tipo de formación, dando origen al término Steam. La inclusión del arte en el modelo STEM genera debate en algunas escuelas que ven incompatibilidad en las estructuras de pensamiento propias de las ciencias y el arte [2]. Sin embargo, hay múltiples ejemplos de cómo se pueden crear estrategias de Steam exitosas, en las que el arte juega un papel importante, verbigracia, Hass y otros muestran ejemplos del uso de estrategias de Steam en las que el arte forma parte fundamental en la visualización de modelos matemáticos, usando posibilidades de tecnologías de graficación en *software* como Geogebra y también explorando visualizaciones tridimensionales con realidad aumentada [3]. Por otro lado, el uso de máquinas de cómputo ha hecho notar la importancia de crear estructuras de pensamiento estructurado y ordenado mediante una estrategia denominada "pensamiento computacional". Este enfoque ha mostrado las bondades de la solución de problemas en diferentes ámbitos del conocimiento, con algunas que apoyan el aprendizaje con modelos de Steam [4]. De igual manera, el pensamiento computacional con Steam ha mostrado potenciar el aprendizaje de conceptos complejos, como lo presenta Bati y colaboradores, quienes usaron este enfoque para la enseñanza del concepto de tiempo [5].

A continuación, presentamos la experiencia de la aplicación de un enfoque de Steam junto con pensamiento computacional, aplicado para mejorar la experiencia de aprendizaje de conceptos relacionados con el campo de las matemáticas asociadas al análisis complejo, aprovechando elementos de programación orientados a la visualización de conceptos que permitan una mejor apropiación del conocimiento. El trabajo se desarrolló en el marco del Semillero de investigación ApplyMath, de la Universidad Militar Nueva Granada, en el cual participan estudiantes de diferentes ramas de la ingeniería.

Regiones del plano complejo y su uso en física, matemáticas e ingeniería

El plano complejo y su geometría desempeñan un papel fundamental en la búsqueda de soluciones de problemas en matemáticas y física y sus aplicaciones a la ingeniería. Problemas clásicos en variable compleja son fundamentales en las ciencias básicas y a menudo son la fuente de avances teóricos y prácticos en estas áreas.

Conceptos como los de funciones analíticas, transformaciones conformes, integración de funciones complejas, teorema de Cauchy y teoría de potencial suelen ser usados en la resolución de problemas de la física-matemática. Ejemplo de estos son aquellos relacionados con la mecánica de fluidos, en los que la resolución de las ecuaciones diferenciales requiere técnicas tales como la transformada de Fourier y la teoría espectral, que son fundamentales para la ingeniería en telecomunicaciones, el procesamiento de señales de audio y de imágenes, que tienen como base el sistema de los números complejos. De igual forma, las funciones de Green son ampliamente usadas en la resolución de problemas de valores en la frontera, en asuntos que involucran difusión, ondas y campos potenciales. Por otra parte, cuando se buscan las soluciones numéricas de estos problemas, la construcción de los algoritmos está estrechamente relacionada con la geometría del dominio en el que se busca la función solución.

El aprendizaje de este tipo de conceptos suele facilitarse mediante la comprensión visual de los mismos. La representación gráfica de los dominios de las funciones analíticas, usando herramientas tecnológicas en el aula, es un punto de partida en la facilitación de los procesos de pensamiento geométrico asociados con dichos contenidos.

Exploraremos la aplicación práctica de herramientas de programación en Java en la resolución de problemas relacionados con la determinación de regiones en el plano complejo. Comenzaremos recordando conceptos fundamentales sobre la geometría de los números complejos y sus diversas representaciones, estableciendo así una base sólida para abordar problemas más difíciles.

En primer lugar, recordaremos cómo los números complejos pueden ser visualizados en el plano complejo, en su forma rectangular y polar. Por un lado, usaremos la representación en forma rectangular para formalizar la visualización de la parte real e imaginaria de un número complejo, como las coordenadas de un punto en el plano, mientras que, por otro lado, recordaremos la forma polar, la cual proporciona una perspectiva de la magnitud y del argumento del número complejo.

Presentamos la resolución de dos problemas específicos relacionados con la determinación de regiones en el plano complejo. Estos problemas son usados para determinar la geometría del dominio de funciones complejas.

Integrar este tipo de herramientas tecnológicas en la metodología de los procesos de enseñanza-aprendizaje permite una visualización de la geometría del plano complejo de manera más lúdica, mejorando la comprensión de los conceptos teóricos subyacentes y desarrollando habilidades prácticas en el uso de herramientas computacionales para la exploración y solución de problemas matemáticos complejos.

Generalidades del plano complejo

La expresión $z=\alpha+i\beta$, en la que α y β son números reales e i representa un número complejo. A α se le conoce como la parte real y a β como la parte imaginaria del número z. Una de las formas en que los números complejos son representados es mediante un par ordenado (α, β), lo que permite que puedan ser interpretados de manera gráfica como un punto en un sistema rectangular de coordenadas, en el que el eje horizontal representa a los números reales y el eje vertical a los números imaginarios, de tal manera que cualquier punto del plano se asocia con un número complejo y viceversa.

Igual que los vectores en el plano real, los números complejos z poseen un tamaño, el cual es conocido como el módulo y se denota por $r = |z|$ de z. Tal y como se observa en la figura 1, todo punto del plano complejo, a excepción del origen, se encuentra sobre alguna circunferencia con centro (0,0) y radio $r = \sqrt[2]{\alpha^2 + \beta^2}$.

Designemos por Θ al ángulo en posición normal, cuyo lado final es OP, el cual recibe el nombre del argumento de z, que se denota por $Arg(z)$, en el que $-\pi < Arg(z) \leq \pi$.

Teniendo en cuenta el módulo y el argumento de z podemos expresar α y β de la siguiente manera:

$$\alpha = rcos(\theta), \beta = rsen(\theta), \quad (1)$$

Y, por tanto,

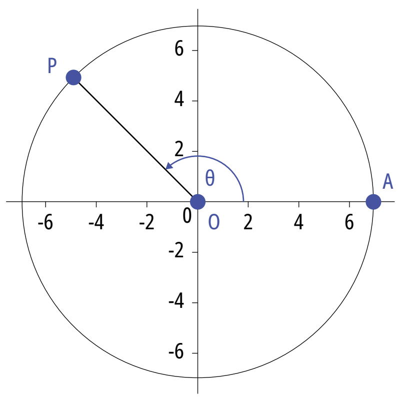
$$z = \alpha + i\beta = r(\cos(\theta) + isen(\theta)), \quad (2)$$

En algunos casos, resulta conveniente escribir los números complejos mediante la fórmula de Euler:

$$z = re^{-i\theta} = r(\cos(\theta) + isen(\theta)), \tag{3}$$

Con estas definiciones, junto con las de las operaciones básicas de números complejos y conceptos de geometría plana, nos será posible solucionar los problemas de regiones en el plano complejo (figura 1) que presentamos en la siguiente sección.

Figura 1. Plano complejo



Fuente: elaboración propia.

Estudio de caso: algunos problemas y propuestas de solución

Los enunciados de los ejercicios que presentaremos están tomados del primer capítulo del libro *Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja*, de L. I. Volkovysky, G. Lunts e I. Amaranovich [6]. Las propuestas de solución dadas se presentan tanto de manera analítica como geométrica y se usa programación en Java para construir algoritmos para visualizar las gráficas correspondientes.

1. La cuerda

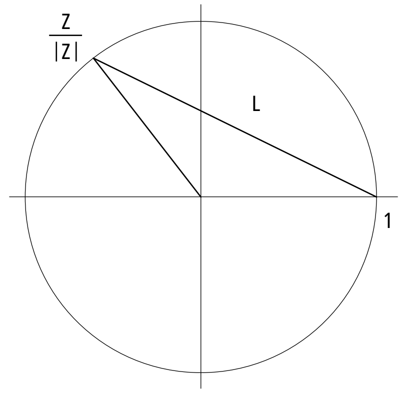
Demuestre la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| < |\arg z|, \tag{4}$$

La expresión $\frac{z}{|z|}$ representa números complejos cuyo módulo es 1. Por tanto, cualquiera de estos números estará sobre la circunferencia centrada en (0, 0) con radio 1. Observemos que el número $z = 1 + 0i$ es un número fijo que está sobre el eje horizontal.

La expresión $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right|$ geométricamente se puede interpretar como la longitud L de la cuerda que une el punto $\frac{z}{|z|}$ con el punto 1, como se ve en la figura 2.

Figura 2. La cuerda



Fuente: elaboración propia.

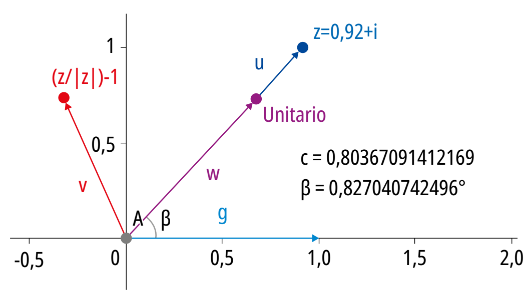
De la geometría plana sabemos que la longitud de un arco de circunferencia S puede ser calculada mediante la fórmula $S = r\theta$, dado que en nuestro caso $r = 11$, tenemos que $S = \theta$ y la longitud de la cuerda queda dada por $L = 2rsen\frac{\theta}{2}$.

Reemplazando estas expresiones en (4), se obtiene:

$$\left|sen\frac{\theta}{2}\right| \leq \left|\frac{\theta}{2}\right| \tag{5}$$

La desigualdad (5) resulta ser cierta. Esto se puede comprobar con el hecho que $|\cos x| \leq 1$, e integrando a ambos lados respecto de x tenemos que $|\text{sen}\, x| < x$, llegando así a comprobar la desigualdad enunciada en (4).

Figura 5. Vectores, puntos y ángulos implementando la librería Graphics 2D Java



Fuente: elaboración propia.

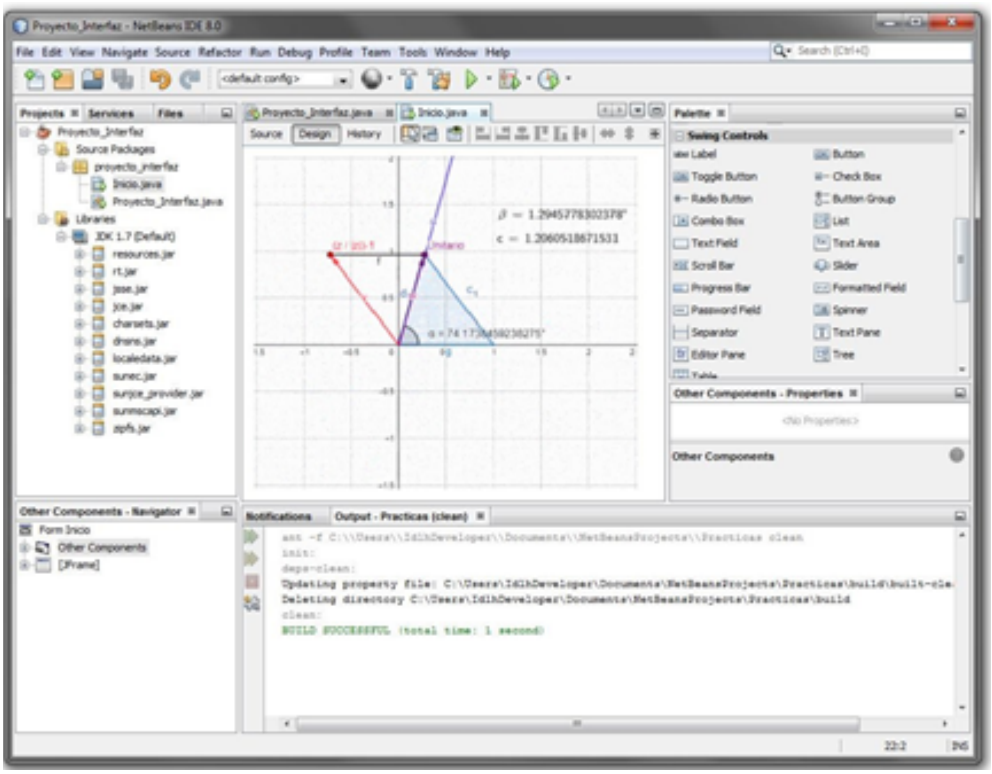
Este análisis geométrico fue aplicado para construir el algoritmo correspondiente implementado en Java (figuras 6 y 7). Partimos de graficar cada una de las partes de la desigualdad (4), como se aprecia en la figura 5. Primero generamos un número complejo z cuya parte real e imaginaria fueran variables (esto con el fin de simular posibles coordenadas del número complejo en su forma cartesiana), enseguida trazamos el vector u (azul oscuro); luego consideramos los números z, que en términos de vectores quedan representados por vectores unitarios (vector morado w). Para el lado izquierdo de la desigualdad $\frac{z}{|z|}-1$ (vector rojo v), calculamos el módulo del vector v y lo denotamos con la letra c. Al argumento de z lo designamos por β —el ángulo formado entre el rayo real y el vector u—. Al correr el programa se puede observar que $c \leq \beta$.

Figura 7. Código Java “la cuerda”

```java
import java.awt.Graphics2D;
import javax.imageio.ImageIO;
import javax.swing.event.*;
...

void Graficar(Graphics ap, int xg, int yg)
{
  int xi=0,yi=0,xi1=0,yi1=0,numPuntos=5;
  int cxmin,cxmax,cymin,cymax;
  double valxi=0.0, valxi1=0.0, valyi=0.0,valyi1=0.0;
  Complex valC; //Manejo de complejos en JEP
  double imgx;

  Graphics2D g = (Graphics2D) ap;
  g.setRenderingHint(RenderingHints.KEY_ANTIALIASING,
    RenderingHints.VALUE_ANTIALIAS_ON);

  g.setFont(ft10);
  g.setPaint(new Color(0,0,150));
  g.draw(new Line2D.Double(xg, 10, xg, Galto-10));
  g.draw(new Line2D.Double(10, yg, Gancho-10, yg));
}
class SliderPanel extends JPanel
{
  JSlider xSlider,ySlider;

  SliderPanel()
  {
   setLayout(new GridLayout(1,2));
   SliderListener auditor = new SliderListener();
   xSlider = new JSlider(JSlider.VERTICAL, 1, 200, 20);
   xSlider.addChangeListener(auditor);
   add(xSlider);
   ySlider = new JSlider(JSlider.VERTICAL, 1, 200, 20);
   ySlider.addChangeListener(auditor);
   add(ySlider);
   xSlider.setMinorTickSpacing(20);
   xSlider.setPaintTicks(true);
   xSlider.setPaintLabels(true);
   ySlider.setMinorTickSpacing(20);
   ySlider.setPaintTicks(true);
   ySlider.setPaintLabels(true);
  }
}
```

Fuente: elaboración propia.

Figura 6. Interfaz Java, visualización de “la cuerda” con la librería Graphics 2D Java



Fuente: elaboración propia.

3. ¡Qué circunferencias!

Explique el significado geométrico de la siguiente relación:

$$|2z| > |z^2 + 1| \tag{6}$$

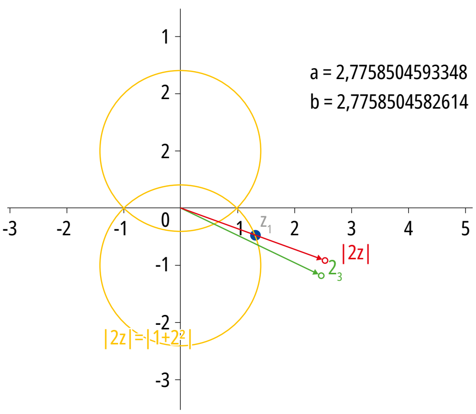
Sea $z = re^{-i\theta}$, reescribimos la desigualdad (10) y elevamos al cuadrado cada lado

$$\left|2re^{-i\theta}\right|^2 > \left|(re^{-i\theta})^2 + 1\right|^2 \tag{7}$$
$$4r^2 > (r^2 cos2\theta + 1)^2 + (r^2 sen2\theta)^2$$
$$0 > r^4 + r^2(2cos2\theta - 2) + 1$$

Para determinar la región descrita por la última desigualdad en (7), inicialmente consideramos la igualdad (8):

$$r = -(cos2\theta - 1) \pm \sqrt[2]{(cos2\theta - 1)^2 - 1} \tag{8}$$

Figura 8. Gráfico generado en Java



Fuente: elaboración propia.

Al usar programación en Java con la librería Graphics 2D nos damos cuenta de que estas igualdades nos generan la visualización de un par de circunferencias, como se ve en la figura 8.

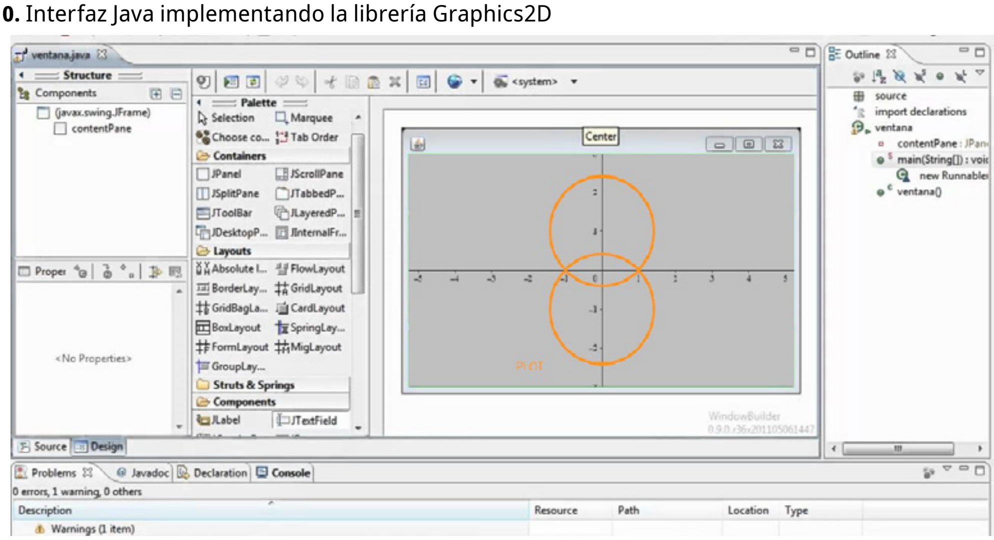
Mediante una inspección se pudo concluir que la desigualdad (6) en el plano complejo queda representada como el interior de las circunferencias, excepto la intersección entre ellas.

Figura 9. Código Java "¡Qué circunferencias!"

```
import java.awt.Graphics2D;
import javax.imageio.ImageIO;
import javax.swing.event.*;
...

public static void main(String[] args) {
    class CustomDataset extends AbstractXYDataset {
        public int getSeriesCount() {
            return 1;
        }
        public Comparable<?> getSeriesKey(int series) {
            return "-x^4-y^4+2x^2+6y^2-2x^2y^2 = 1";
        }
    }
JFreeChart chart = ChartFactory.createXYLineChart("|2z|>%d
    =|1+pow(z,2)|", "x-axis", "y-axis", new CustomDataset());
    XYPlot plot = (XYPlot) chart.getPlot();
    plot.setDomainZeroBaselineVisible(true);
    plot.setRangeZeroBaselineVisible(true);
    ChartPanel panel = new ChartPanel(chart);
    panel.setPreferredSize(new Dimension(500, 500));
    JOptionPane.showMessageDialog(null, panel, "Chart",
    JOptionPane.PLAIN_MESSAGE);
}

public class WriteImageType {
 Graphics2D ig2 = bi.createGraphics();
 Font font = new Font("TimesRoman", Font.BOLD, 20);
 ImageIO.write(bi, "gif", new File("c:\\Grafica_Animada.GIF")
    );
}
```

Fuente: elaboración propia.

Figura 10. Interfaz Java implementando la librería Graphics2D



Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

Los números complejos son una herramienta fundamental en la descripción de fenómenos físicos. Su utilidad es bastante amplia y conocida, sin embargo, la interiorización de su geometría no siempre resulta obvia ni de fácil manejo analítico. Es por esto que facilitar la representación gráfica de regiones del plano complejo permite visualizar conceptos abstractos como rotaciones, dilataciones y traslaciones, conceptos que facilitan la comprensión de fenómenos físicos complejos.

La visualización de regiones y lugares geométricos en el plano complejo es un desafío para matemáticos, físicos e ingenieros, pues no siempre es evidente la geometría de la región compleja en la que se pretende hallar la solución del problema. En tales casos, usar herramientas tecnológicas apoyan el aprendizaje con un enfoque Steam con pensamiento computacional para representar gráficamente las regiones, lo que permite una asimilación visual estéticamente creada de las mismas y facilita la comprensión de sus propiedades.

Los problemas planteados en el aula de clase a los estudiantes del semillero en formación universitaria de pregrado de ingeniería no solo buscan que se apliquen fórmulas y técnicas, sino que también pretenden que entrenen su pensamiento para resolver problemas de manera lógica, haciendo uso incluso de su imaginación y su intuición. Los problemas de regiones en el plano complejo relacionan habilidades de pensamiento analítico y geométrico, permiten que los estudiantes desarrollen un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos más allá de la simple manipulación numérica y les ayudan a encontrar las conexiones entre diferentes conceptos y a aplicarlos de manera efectiva en la solución de los problemas. Dibujar la solución de un problema también facilita la comprensión de las relaciones existentes entre sus distintas variables.

Así mismo, la implementación de diferentes lenguajes de programación amplía aún más el alcance del aprendizaje matemático, al proporcionar herramientas para observar, de una manera interactiva, las soluciones de problemas. La capacidad de representar gráficamente ecuaciones y desigualdades proporciona que el aprendizaje sea más atractivo y dinámico, por lo que los estudiantes pueden llegar a desarrollar una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

En resumen, la integración de la programación como herramienta para lograr la visualización en el proceso de aprendizaje de las matemáticas enriquece la experiencia educativa, al brindar nuevas formas de explorar y comprender conceptos abstractos y aplicaciones prácticas.

Agradecimientos

Los autores expresan su agradecimiento a los estudiantes del Semillero ApplyMath, A. A. Sanabria Agudelo, J. C. Tinjacá Sanabria, L. E. Maldonado Garzón, D. F. Zárate Bello, C. A. Guerra Jiménez y K. D. Gutiérrez Pérez, por su dedicado trabajo en el desarrollo de los problemas planteados y por la validación del aprendizaje de variable compleja con prácticas de pensamiento computacional.

Referencias

[1] T. R Kelley y J. G. Knowles, "A conceptual framework for integrated STEM education", *Ij STEM*, *vol. 3*, no. 11, 2016, DOI: 10.1186/s40594-016-0046-z

[2] A. Stroud y L. Baines, "Inquiry, Investigative Processes, Art, and Writing in STEAM", en: M. S. Khine y S. Areepattamannil (eds.), *STEAM Education* Springer, Cham, 2019.

[3] S. Psycharis, "STEAM in education: A literature review on the role of computational thinking, engineering epistemology and computational science. computational steam pedagogy (CSP)", *Scientific Culture*, Apr, 4(2), pp. 51-72, 2018.

[4] B. Haas, Z. Lavicza, T. Houghton y Lavaca. Kreis, "Can you create? Visualising and modelling real-world mathematics with technologies in STEAM educational settings", *Current Opinion in Behavioral Sciences*, Aug. 1, 52, pp. 101-297, 2023.

[5] K. Bati, MI. Yetişir, I. Çalişkan, G. Güneş y E. Gül Saçan, "Teaching the concept of time: A steam-based program on computational thinking in science education", *Cogent Education*, Jan 1, 5(1), 1507306, 2018.

[6] L. Volkovyski, G. Lunts y I. Aramanovich, "Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja", Moscú: MIR, 1977.