Revista Facultad de Ciencias Básicas
2022
Vol. 18(1)
Enero-junio ▪ ISSN: 1900-4699 · e-ISSN: 2500-5316 ▪ pp. 27-47

Editorial Neogranadina

DOI: https://doi.org/10.18359/rfcb.6665

Sobre el número de rotación en el círculo y el anillo*

Fabián Sánchez Salazar[a]

Resumen: Uno de los conceptos y herramientas fundamentales para el estudio de la existencia de órbitas periódicas es el número de rotación, que fue introducido por Henri Poincaré hacia el año de 1913, y juega un papel fundamental en la descripción cualitativa de sistemas dinámicos. En este trabajo, se hará una revisión detallada de las propiedades del número de rotación en el círculo y el anillo, y presentaremos algunas aplicaciones a los difeomorfismos Morse-Smale, el flujo *billiard* y el mapa de retorno geodésico.

Palabras clave: número de rotación; homeomorfismo; *billiards*; órbitas periódicas; Morse-Smale

Recibido: 27/02/2023 **Aceptado:** 23/03/2023 **Disponible en línea:** 29/12/2023

Cómo citar: Sánchez Salazar, F. (2023). Sobre el número de rotación en el círculo y el anillo. *Revista Facultad De Ciencias Básicas, 18*(1), 27–47. https://doi.org/10.18359/rfcb.6665

* Artículo de revisión.

a Ph.D.en matemáticas, magíster en matemáticas, matemático. Universidad del Rosario. Escuela ICT.
Correo electrónico: fabian.sanchez@urosario.edu.co
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1111-4436

About the Rotation Number in the Circle and the Ring

Abstract: One of the fundamental concepts and tools for studying the existence of periodic orbits is the rotation number, introduced by Henri Poincaré around the year 1913, playing a crucial role in the qualitative description of dynamic systems. In this work, we will provide a detailed review of the properties of the rotation number in the circle and the ring, presenting some applications to Morse-Smale diffeomorphisms, billiard flow, and geodesic return map.

Keywords: Rotation Number; Homeomorphism; Billiards; Periodic Orbits; Morse-Smale

Sobre o número de rotação no círculo e no anel

Resumo: Um dos conceitos e ferramentas fundamentais para o estudo da existência de órbitas periódicas é o número de rotação, introduzido por Henri Poincaré por volta do ano de 1913, desempenhando um papel fundamental na descrição qualitativa de sistemas dinâmicos. Neste trabalho, será realizada uma revisão detalhada das propriedades do número de rotação no círculo e no anel, e apresentaremos algumas aplicações aos difeomorfismos Morse-Smale, ao fluxo *billiard* e ao mapa de retorno geodésico.

Palavras-chave: número de rotação; homeomorfismo; billiard; órbitas periódicas; Morse-Smale

Introducción

Los sistemas dinámicos son una de las ramas de la matemática más estudiadas en la actualidad, debido a sus múltiples aplicaciones a los fenómenos físicos y situaciones de la vida real [1], [2], [3]. Sus inicios se remontan a los estudios de Isaac Newton en el campo de la mecánica celeste [4], y de Henri Poincaré en la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales [5], [6]. Si bien, hay una larga tradición en el estudio de sistemas dinámicos, no fue sino hasta los años cuarenta que se establecieron como una rama de la matemática, gracias a los aportes y al trabajo destacado de varios matemáticos, físicos e ingenieros, entre los que se pueden mencionar: Stephen Smale, ganador de la medalla Fields en 1966 [7], [8], [9]; Lyapunov y su teoría de la estabilidad [1], y Robinson y Arnold, entre otros [10], [11], [12].

De manera general, en los sistemas dinámicos se abordan situaciones que dependen de algunos parámetros definidos (por lo general, el tiempo), y cuya variación se da de acuerdo con una serie de leyes ya establecidas, por ejemplo, leyes físicas, y se trata de predecir el comportamiento hacia el futuro y hacia el pasado a partir de unas condiciones iniciales dadas [13], [5], [14].

Cuando se estudian sistemas dinámicos, generalmente la ley de evolución está dada por una función f y el espacio de tiempos puede ser discreto ($T = \mathbb{Z}$) o continuo ($T = \mathbb{R}$) [6], [7]. Se quiere determinar el comportamiento futuro de este sistema, y obtener información sobre la existencia de órbitas periódicas del sistema y del comportamiento en términos de estabilidad del mismo. Se sabe que, para un sistema dinámico, con una ley de evolución dada por un difeomorfismo[1] f sobre, $\mathbb{R}$ no hay recurrencia no trivial, y solo pueden existir puntos periódicos de periodo uno o dos [15]. No ocurre lo mismo en el caso del círculo $\mathbb{S}^1$, en donde hay recurrencia no trivial y se pueden encontrar puntos periódicos de cualquier periodo. Esto hace que sea más interesante estudiar la dinámica de difeomorfismos sobre $\mathbb{S}^1$ y sobre otros espacios, como el anillo, la esfera, el toro, etc. La importancia de trabajar sobre difeomorfismos está en el hecho de que la función debe ser diferenciable con inversa diferenciable, lo cual es importante para aplicar las propiedades en algunos escenarios de la física en los que se requieren estas hipótesis.

De acuerdo con lo anterior, el objetivo principal del estudio de este documento es revisar de manera profunda los conceptos, propiedades y resultados importantes del número de rotación en el círculo y en el anillo, y mostrar la importancia que tiene este número en algunas aplicaciones de la física, como el problema de los tres cuerpos, los flujos *billiard* y el mapa de retorno sobre geodésicas. En todos estos problemas se estudia la existencia de órbitas periódicas y, en ese sentido, el número de rotación juega un papel fundamental, tal y como se verá en las siguientes sesiones. Primero, se revisará la definición y propiedades del número de rotación en el círculo, luego, en el anillo, y notaremos algunas diferencias importantes cuando se cambia de un espacio a otro. Finalmente, se abordarán algunas aplicaciones del número de rotación.

El número de rotación y homeomorfismos en el círculo

En esta sección se revisará la dinámica de los homeomorfismos definidos sobre el círculo que preservan la orientación [1]. Una herramienta importante que hace posible este estudio es el número de rotación, que mide el promedio en que es rotado un punto en el círculo al ser iterado por un homeomorfismo. Se demostrará que, cuando este número es racional, se puede garantizar la existencia de una órbita periódica.

El número de rotación ha sido un concepto muy estudiado por múltiples autores. Entre estos, podemos mencionar a Jhon Franks y sus investigaciones sobre el número de rotación en una y dos dimensiones, en indagaciones sobre geodésicas, en homeomorfismos del círculo y del anillo, y en los difeomorfismos de Moser [16]-[23]. Handel analizó propiedades del número de rotación en

1 Esto es, función biyectiva, diferenciable e inversa diferenciable.

homeomorfismos definidos sobre el anillo [24]; Herman obtuvo propiedades de los difeomorfismos definidos sobre el círculo usando el número de rotación [25]; Novo y Núñez examinaron el número de rotación en sistemas hamiltonianos [26]; Zhang y Obaya estudiaron la existencia de órbitas periódicas usando el número de rotación [27]; Pavani y Veldhuizen realizaron aproximaciones numéricas del número de rotación [28], [29] y [30], y Lambert estudió el número de rotación y los exponentes de Lyapunov para mapas de dos dimensiones [31], [32]. Otros autores que obtuvieron resultados acerca de la existencia de órbitas periódicas de diferentes tipos de mapeos fueron Jhonson, Puel, Bates, Feng, Jaroslaw y Navas [32]-[38].

El número de rotación también se puede definir en el anillo. En la siguiente sección, se trabajarán algunas propiedades y resultados importantes del número de rotación en dicho espacio. El estudio del número de rotación en la esfera también ha sido estudiado a profundidad, y requiere elementos de topología algebraica, de la teoría Carathéodory y *prime ends*, del índice de Letschetz, etc. Para ampliar la información se puede consultar: [39]-[45].

Primero, recordaremos algunas definiciones clásicas en sistemas dinámicos [1], [10].

Definición 1. Para una función continua f, la ***órbita a futuro*** de un punto a es el conjunto

$$\Theta^{+}(a) = \{f^{n}(a) \mid n \geq 0\} \tag{1}$$

Análogamente, si f es invertible, la ***órbita hacia el pasado*** es definida como

$$\Theta^{-}(a) = \{f^{n}(a) \mid n \leq 0\}. \tag{2}$$

Ahora, la definición de punto crítico y punto periódico.

Definición 2. Dada f, una función diferenciable, un punto a es llamado un punto crítico de f si $f'(a) = 0$. Si, además, $f''(a) \neq 0$, el punto crítico se dice no-degenerado.

Definición 3. Sea f una función continua a valor real, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un punto a se dice periódico de periodo n si $f^{(n)}(a) = a$ y $f^{(j)}(a) \neq a$ para $0 < j < n$. Si a tiene periodo uno, entonces este es llamado un punto fijo.

Ahora, definimos el conjunto estable e inestable de un punto fijo p [1], [3], [46], [47].

Definición 4. Suponga que f: X → X es un homeomorfismo y $p \in$ X un punto fijo de f. El ***conjunto estable*** $W^{s}(p)$ se define así:

$$W^{s}(p) = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} dist(f^{n}(x), p) = 0\} \tag{3}$$

Y el ***conjunto inestable*** $W^{u}(p)$

$$W^{u}(p) = \{x \in X \mid \lim_{n\to-\infty} dist(f^{n}(x), p) = 0\} \tag{4}$$

Donde $dist(f^{n}(x), p)$ denota la distancia de $f^{n}(x)$ a p.

Consideremos la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_{n})$ con $n \in \mathbb{N}$. Cuando los valores propios de la matriz $Df(p)$ satisfacen que $|\lambda| \neq 1$, entonces el punto fijo se denomina ***hiperbólico***. Los puntos hiperbólicos han sido de gran interés en el estudio de las propiedades de órbitas periódicas. Por ejemplo, en [48] se estudian en los difeomorfismos hamiltonianos y en [51] se demuestra la existencia de infinitos puntos hiperbólicos en mapeos de una y dos dimensiones.

El número de rotación

Se denota por $\mathbb{S}^1 = \{z: |z| = 1\}$ al círculo unitario. Luego, existe una proyección natural π: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por:

$$\pi(t) = t \mod 1 \qquad ó \qquad \pi(t) = e^{2\pi i t} \tag{5}$$

A lo largo de toda la sección f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ será un homeomorfismo que preserva la orientación, es decir:

$$x \leq y \mod 1 \quad entonces \quad f(x) \leq f(y) \mod 1 \tag{6}$$

A una aplicación f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga la siguiente condición:

$$\pi \circ F = f \circ \pi$$

Se le denomina un ***levantamiento de f*** y satisface que es una función monótona creciente y, además, $F(x + 1) = F(x) + 1$.

La primera propiedad es consecuencia de que f preserve orientación y, la segunda, del hecho de que es una función periódica de periodo uno.

Ejemplo 1. Sea $f\lambda$ la rotación en λ unidades en $\mathbb{S}^1$

$f_\lambda(x) = x + \lambda$ mod 1

Es fácil ver que $F(x) = x + \lambda$ es un levantamiento de f. En efecto,

$$\pi \circ F(x) = \pi\big(F(x)\big) = \pi(x+\lambda) = e^{2\pi i(x+\lambda)} = f_\lambda\big(\pi(x)\big) = f_\lambda \circ \pi(x)$$

Sea f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación, y U y V dos levantamientos de f. Entonces, $\pi \circ U = f \circ \pi$ y $\pi \circ V = f \circ \pi$, por lo tanto, $\pi \circ U = \pi \circ V$. Se concluye que $F(x) = G(x) + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 5. Sea f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo con la propiedad que preserva la orientación y considere f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un levantamiento de f. Se define el ***número de translación*** como:

$$\rho_0(F,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n}. \qquad (7)$$

Surgen de inmediato algunas preguntas, como, por ejemplo: ¿el límite existe?, ¿es independiente de x?, ¿qué sucede si escojo otro levantamiento?

Sean F y G dos levantamientos de f. Entonces, $F(x) = G(x) + k$, por lo tanto:

$$F^2(x) = F(G(x)+k) = F\big(G(x)\big) + k = G\big(G(x)\big) + 2k = G^2(x) + 2k$$

En general, $F^n(x) = G^n(x) + nk$, luego:

$$\rho_0(F,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(x)-x+nk}{n} = \rho_0(G,x) + k$$

Esto da respuesta a la tercera pregunta. Para resolver las otras dos, se enuncia el siguiente teorema [1].

Teorema 1. Sea f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo con la propiedad que preserva la orientación y F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ el límite

$$\rho_0(F,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} \qquad (8)$$

Existe y es independiente del punto x.

Demostración. Supongamos, por ahora, que el límite existe para algún $x \in [0,1)$. Como π tiene periodo uno, entonces F envía un intervalo de longitud uno en otro intervalo de longitud uno. Por lo tanto, si $x, y \in [0,1)$, entonces $|F^n(x) - F^n(y)| \leq 1$. Luego:

$$|(F^n(x)-x) - (F^n(y)-y)| \leq |F^n(x) - F^n(y)| + |x-y| \leq 2$$

Y así:

$$\rho_0(F,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)-x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(y)-y}{n} = \rho_0(F,y)$$

Ahora, como $F^n(y+k) = F^n(y) + k$, concluimos que el límite existe para todo $y \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora la existencia en el caso en el que $x \in [0,1)$. Existen dos posibilidades, que x sea punto periódico o que no lo sea.

En el primer caso, tenemos que existen $z \in \mathbb{S}^1$ y $q \in \mathbb{N}$ tales que $f^q(z) = z$. En consecuencia, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(x) = z$, así:

$f^q(\pi(x)) = \pi(x)$

Por otro lado, como $\pi \circ F(x) = f \circ \pi(x)$, entonces $\pi \circ F^q(x) = f^q \circ \pi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, $\pi \circ F^q(x) = \pi(x)$ implica $F^q(x) = x + p$ para $p \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Por algoritmo de la división, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = kq + r$ con $0 \leq r < q$, entonces:

$$F^n(x) = F^{kq}(F^r(x)) = F^r\left(F^{kq}(x)\right) =$$

$$F^r(x + kp) = F^r(x) + kp$$

Por lo tanto,

$$\frac{F^n(x)-x}{n} = \frac{F^r(x)+kp-x}{kq+r} \tag{9}$$

Y tomando límite en (9), cuando $n \to \infty$, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{k\to\infty} \frac{F^r(x) - x + kp}{kq + r} = \frac{p}{q}$$

Se concluye que, si $\pi(x)$ es un punto periódico de f, entonces el límite existe.

Supongamos ahora que $\pi(x)$ no es un punto periódico de f, entonces:

$F^q(x) \neq x + p \quad$ para todo $\quad x \in \mathbb{R} \quad p, q \in \mathbb{N}$

Como F es continua para cada p, $q \in \mathbb{N}$, tenemos:

$F^q(x) > x + p$ o $F^q(x) < x + p$, es decir, $F^q(x) - x > p$ o $F^q(x) - x < p$. Dado $n \in \mathbb{N}$ escogemos p_n tal que:

$F^n(x) - x < p_n \quad$ y $\quad p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n$

Para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, para cualquier $m \in \mathbb{N}$:

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x) - x = \sum^{m-1} \left[F^n\left(F^{kn}(x)\right) - F^{kn}(x)\right] < mp_n$$

Por lo tanto,

$$\frac{p_n}{n} - \frac{1}{n} < \frac{F^{mn}(x)-x}{nm} < \frac{p_n}{n} \tag{10}$$

$$\frac{p_m}{m} - \frac{1}{m} < \frac{F^{mn}(x)-x}{nm} < \frac{p_m}{m} \tag{11}$$

De (10) y (11) tenemos que $\left|\frac{p_m}{m} - \frac{p_n}{n}\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ y, como la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ es convergente, entonces $\left(\frac{p_n}{n}\right)$ resulta ser de Cauchy, en virtud de que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo, entonces, esta sucesión converge. Si tomamos límite a ambos lados, por el teorema del emparedado tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} < +\infty$$

Por lo tanto, el límite existe. Concluimos que $\rho_0(F, x)$ existe para todo $x \in \mathbb{S}^1$.

De la prueba del teorema anterior podemos deducir el siguiente lema.

Lema 1. Dado $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ y G, un homeomorfismo que preserva la orientación y un levantamiento de f, respectivamente, y $m \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\rho_0(G^m, x) = m\rho_0(G, x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Demostración. Partimos de lo siguiente

$$\frac{G^{mn}(x)-x}{n} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{G^n\left(G^{kn}(x)\right)-G^{kn}(x)}{n} \tag{12}$$

Haciendo $y = G^{kn}(x)$ en (12), y usando el hecho de que el número de translación no depende de la escogencia del punto, tenemos:

$$\rho_0(G^m,x) = \frac{G^{mn}(x)-x}{n} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{G^n\left(G^{kn}(x)\right)-G^{kn}(x)}{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \lim_{n\to\infty} \frac{G^n(\mathrm{y})-\mathrm{y}}{n} = \sum_{k=0}^{m-1} \rho_0(G,y) = m\rho_0(G,x)$$

Definición 6. Sea f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación y f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Definimos el ***número de rotación de f*** como:

$\rho(f) = \rho_0(F)$ mod 1.

El número de rotación no depende del levantamiento, ni del punto, y siempre existe.

Intuitivamente, esta cantidad mide el promedio en que es rotado un punto en el círculo después de iterarlo por la aplicación f.

A continuación, damos algunos teoremas y la demostración de estos, que muestran propiedades importantes del número de rotación [1], [16], [13].

Teorema 2. Supongamos que f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo que preserva la orientación. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, si g: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo $C^0 - \delta$ cercano a f, entonces $|\rho(f) - \rho(g)| < \epsilon$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{2}{n} < \epsilon$. Podemos tomar un levantamiento F que satisfaga:

$r - 1 < f^n(0) < r + 1$ para algún entero r.

Sea δ suficientemente pequeño y G un levantamiento de g tal que

$$r-1 < G^n(0) < r+1$$

Entonces,

$$m(r-1) < F^{mn}(0) < m(r+1) \tag{13}$$

$$m(r-1) < G^{mn}(0) < m(r+1) \tag{14}$$

Así pues, de (13) y (14), tenemos:

$$\left|\frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{G^{mn}(0)}{mn}\right| < \frac{2}{n} < \epsilon$$

Por lo tanto, $|\rho_0(F) - \rho_0(G)| < \epsilon$ y concluimos que $|\rho(f) - \rho(g)| < \epsilon$.

Teorema 3. El número de rotación es un invariante de conjugación topológica.

Demostración. Sean f y h dos homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ que preservan la orientación, y sean F y H levantamientos de f y h, respectivamente. Afirmamos que $H \circ F \circ H^{-1}$) es un levantamiento de $h \circ f \circ h^{-1}$). En efecto:

$$\pi \circ H \circ F \circ H^{-1} = h \circ \pi \circ F \circ H^{-1} = h \circ f \circ \pi \circ H^{-1}$$
$$= h \circ f \circ h^{-1} \circ \pi$$

Ahora,

$$\frac{\left(HFH^{-1}\right)^n(x)-x}{n} = \frac{HF^nH^{-1}(x)-x}{n}$$
$$= \frac{H\left(F^nH^{-1}(x)\right)-F^n\left(H^{-1}(x)\right)}{n} + $$
$$+ \frac{H^{-1}(x)-x}{n}$$

$$\frac{F^n\left(H^{-1}(x)\right)-H^{-1}(x)}{n} + \tag{15}$$

Observamos que, tomado límite cuando $n \to \infty$ en (15), el primer y último término tienden a cero, por lo tanto:

$$\rho_0(hfh^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(HFH^{-1})^n(x)-x}{n} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n\left(H^{-1}(x)\right)-H^{-1}(x)}{n} = \rho_0(f)$$

Con lo cual, podemos concluir que $\rho(hfh^{-1}) = \rho(f)$.

Teorema 4. El número de rotación es racional si, y sólo si, f tiene un punto periódico.

Demostración. Si f tiene un punto periódico, se tiene de inmediato que el número de rotación es racional. Probemos el otro sentido.

Supongamos que el número de rotación es racional, $\rho(f) = \frac{p}{q}$. Sea $\tilde{F}$ un levantamiento de f. Por lo tanto, $\rho_0(\tilde{F}) = \frac{p}{q} + k, \quad k \in \mathbb{Z}$. Sea $F(x) = \tilde{F}(x) - k$, así pues, $\rho_0(F) = \frac{p}{q}$, y además, $\rho_0\ (F^q - \rho) = 0$.

Llamemos $G(x) = F^q\ (x) - \rho$. Basta ver que G tiene un punto fijo en $\mathbb{R}$, pues esto implicaría que el conjunto de puntos periódicos con período q de f es no vacío.

Tenemos tres casos:

$a)\quad G(0) = 0 \qquad b)\quad G(0) > 0 \qquad c)\quad G(0) < 0.$

Consideraremos solamente el segundo caso, pues el primero es trivial y el tercero es análogo al segundo caso.

Como F es creciente, entonces G también lo es, por lo tanto:

$$0 < G(0) < G^2(0) < \cdots < G^n \ldots..$$

Así, tenemos de nuevo dos casos:

Si $0 < G^n\ (0) < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $G^n\ (0)$ resulta ser una sucesión acotada y monótona, por lo tanto, es convergente:

$$G^n(0) \to x_0 \quad cuando \quad n \to \infty,$$

$$G(x_0) = G\left(\lim_{n\to\infty} G^n(0)\right) = \lim_{n\to\infty} G^{n+1}(0) = x_0$$

Así, G tiene un punto fijo.

Ahora, supongamos que existe $k > 0$ tal que $G^k\ (0) > 1$ luego:

$$G^{2k}(0) > G^k(1) = G^k + 1 > 2$$

Razonando inductivamente, $G^{jk}\ (0) > j$, por lo tanto:

$$\frac{G^{jk}(0)}{jk} > \frac{1}{k}, \text{ es decir, } \rho_0(G) > \frac{1}{k}$$

Lo cual es una contradicción, ya que $\rho_0\ (G) = 0$. Esto nos dice que este caso no se tiene, con lo cual se termina la prueba.

Los siguientes teoremas están basados en la teoría de [1].

Teorema 5. Sea f_λ una rotación en $\mathbb{S}^1$. Si λ es irracional, entonces f_λ no tiene puntos periódicos, y todo punto en $\mathbb{S}^1$ tiene una órbita densa.

Demostración. Por el teorema anterior, tenemos que una rotación irracional no puede tener puntos periódicos.

Veamos que todo punto tiene una órbita densa. Recordemos, del ejemplo 1, que $f_\lambda(x) = x + \lambda$ es un levantamiento de f_λ y, además, $\rho_0\ (f_\lambda) = \lambda + k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\rho(f_\lambda) = \lambda$.

Afirmamos que los $F_\lambda^j(x)$son distintos, modulo 1, para todo $j \in \mathbb{N}$.

En efecto, si existieran n, m tal que $F_\lambda^n(x) = F_\lambda^m(x)$ mod 1, entonces $x + n\lambda = x + m\lambda + k$, de donde $\lambda = \frac{k}{m-n}$, lo cual es una contradicción. Así pues, $\{F_\lambda^j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es un conjunto infinito y, por lo tanto, $\{f_\lambda^j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ también lo es. Como $\mathbb{S}^1$ es compacto, este conjunto tiene un punto de acumulación en $\mathbb{S}^1$.

Luego, $d\left(f_\lambda^n(x), f_\lambda^m(x)\right) < \epsilon$. Como el levantamiento preserva la longitud, si $q = m - n$, entonces $d(F^q\ (x) - x) < \epsilon$ de donde concluimos que esta es una órbita densa.

Teorema 6. Sea h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo que preserva la orientación con número de rotación irracional. Para $x \in \mathbb{S}^1$, si consideramos $I = [h^n\ (x),\ h^m\ (x)]$ con n, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \neq m$, entonces la órbita positiva de todo punto $y \in \mathbb{S}^1$ tiene otro punto en I, es decir:

$$\Theta^+(a)\ \cap\ I\ \neq\ \emptyset$$

Demostración. Vamos a mostrar primero el resultado para $n = 0$ y $m = 1$. Hay que aclarar que existen dos intervalos en $\mathbb{S}^1$ acotados por x y $h(x)$, pero esto no es problema, el resultado vale para ambos intervalos. La prueba se fundamenta en que I y $I_1 = h^{-1}(I)$ tienen un punto en común, x. Así, $h^{-1}(I_1)$ y I_1 también tienen un punto común, $h^{-1}(x)$, y así sucesivamente. Entonces, $\bigcup_k I_k$ cubre $\mathbb{S}^1$ y, en particular, existe $k \geq 0$ tal que $y \in h^{-k}(I)$. En el caso de que $\bigcup_k I_k$ no cubran todo el círculo, entonces los extremos de I_k convergen a $w \in \mathbb{S}^1$.

$$\lim_{k\to\infty} h^{-k}(x) = w = \lim_{k\to\infty} h^{-k}\big(h(x)\big) \tag{16}$$

Entonces, aplicando h a ambos lados en (16), tenemos que w es punto fijo. En efecto,

$$h(w) = h\left(\lim_{k\to\infty} h^{-k}(x)\right) = \lim_{k\to\infty} h\left(h^{-k}(x)\right) = w$$

Lo cual es una contradicción, por lo tanto, se debe tener que $\bigcup_k I_k$ cubre todo $\mathbb{S}^1$ en el caso $n = 0$ y $m = 1$.

Para demostrar el caso general, suponemos que $n > m$. Consideremos $g = h^{n-m}$ y utilizamos el mismo razonamiento. En este caso, la sucesión de intervalos $I_k = {}^{g-k}(I)$ comparten un punto, dos a dos, y cubren todo el círculo.

Teorema 7. Si f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo, tal que $\rho(f)$ es irracional, entonces:

a. Existe un subconjunto $E \subset \mathbb{S}^1$ tal que $\omega(x) = E$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$.
b. Existen dos posibilidades, o bien E es de cantor $E = \mathbb{S}^1$.

Demostración. Ver [1].

Los siguientes resultados son debidos a J. Franks en [16].

Definición 7. Sea f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo con la propiedad de preservar la orientación, y sea F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Definimos la ***función desplazamiento*** de F, ϕ: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ como:

$$\phi(x + \mathbb{Z}) = F(x) - x \tag{17}$$

Si x' es otra escogencia para x, es decir, $(x + \mathbb{Z} = x' + \mathbb{Z})$, entonces $x' = x + m$ para algún entero m, así, $F(x) - x = F(x') - x'$ y, por lo tanto, ϕ está bien definida.

Tenemos el siguiente teorema, que es muy importante y relaciona el número de rotación con las medidas invariantes [49], [50].

Teorema 8. Sea f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación y también preserva una medida de probabilidad μ, y sea F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Supongamos que ϕ: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es la función desplazamiento de F, entonces:

$$\rho(f) = \int_{\mathbb{S}^1} \phi \, d\mu$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{S}^1$. De acuerdo con el teorema ergódico de Birkhoff (ver [49]), la función $\tilde{\phi}$ definida por:

$$\tilde{\phi}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(f^i(z)\right)$$

Es integrable y satisface:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \phi \, d\mu = \int_{\mathbb{S}^1} \tilde{\phi} \, d\mu \tag{18}$$

Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $z = \pi(x)$, entonces $f^i(z) = \pi\left(F^i(x)\right)$ y:

$$\phi\left(f^i(z)\right) = F\left(F^i(x)\right) - F^i(x) = F^{i+1}(x) - F^i(x)$$

De esto se sigue:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(f^i(z)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(F^{i+1}(x) - F^i(x)\right) = F^n(x) - x$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\phi} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \rho(f)$$

En consecuencia, de (18) se sigue:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \phi \, d\mu = \int_{\mathbb{S}^1} \rho\,(f) d\mu = \rho(f) \int_{\mathbb{S}^1} d\,\mu = \rho(f)$$

Pues μ es una medida de probabilidad.

Aplicación del número de rotación en el estudio de difeomorfismos Morse-Smale

En las anteriores secciones estudiamos homeomorfismos que preservan la orientación y que están definidos sobre el círculo. Para este estudio no hemos pedido ninguna condición sobre la diferenciabilidad de la función. No obstante, en esta sección vamos a pedir que las funciones sean diferenciables, es decir, que sean difeomorfismos. Del conjunto de todos los difeomorfismos que preservan la orientación, estudiaremos propiedades de los difeomorfismos denominados *Morse-Smale* [8], [1], [52], [53].

Definición 8. Un difeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ que preserva la orientación es *Morse-Smale* si tiene número de rotación racional y todos sus puntos periódicos son hiperbólicos.

Esta clase de difeomorfismos satisface dos propiedades muy importantes:

a. Son estructuralmente estables.
b. Cualquier difeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ puede ser aproximado por difeomorfismos Morse-Smale.

Recordemos que:

$$C^r = \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ difeomorfismo de clase } C^r\}$$

Con la norma:

$$\| f - g \| = \sup_{x\in[a,b]} \left| f^{[r]}(x) - g^{[r]}(x) \right| \tag{19}$$

Es un espacio métrico completo, donde $f^{[r]}$ y $g^{[r]}$ denotan las derivadas de orden r de f y g respectivamente.

Ejemplo 2. Consideremos:

$$f(\theta) = \theta + \frac{\pi}{n} + \epsilon \sin(2n\theta)$$

Esta función, que tiene dos órbitas periódicas de periodo $2n$, un atractor en $\theta = \frac{\pi}{2n}$ y un repulsor en $\theta = 0$, resulta ser Morse-Smale.

Vamos a demostrar las dos propiedades enunciadas anteriormente [1].

Teorema 9. Todo difeomorfismo Morse-Smale de $\mathbb{S}^1$ es C^1-estructuralmente estable.

Demostración. Consideremos f un difeomorfismo Morse-Smale, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\rho(f) = 0$, es decir, f tiene solamente puntos fijos. Sea F el levantamiento asociado a f que tiene únicamente puntos fijos. Hay un solo difeomorfismo que cumple esta propiedad.

Vamos a probar que si:

$$G \in C^1 \quad y \quad \| F - G \| < \epsilon$$

Entonces G es topológicamente conjugado a F. Como f es Morse-Smale, F tiene solamente una cantidad finita de puntos fijos en [0,1]. Sean p_1, p_2, ..., p_n esos puntos fijos de F.

Por hipótesis, estos puntos fijos son hiperbólicos, entonces podemos escoger vecindades $U_j = (a_j, b_j)$ de p_j, tales que $F'(x) \neq 1$ en U_j, entonces existe $\epsilon_j > 0$ tal que $|F'(x) - 1| > \epsilon_j$ para todo $x \in U_j$, y además:

$$\left|F(a_j) - a_j\right| > \epsilon_j \qquad \left|F(b_j) - b_j\right| > \epsilon_j$$

Como $\| F - G \| < \epsilon$, se debe tener que $G'(x) \neq 1$ en U_j y, además, G debe tener un punto fijo. En efecto:

$$|G'(x) - F'(x)| < \epsilon_j$$

$$-\epsilon_j < G'(x) - F'(x) < \epsilon_j$$

$$-\epsilon_j + F'(x) < G'(x) < \epsilon_j + F'(x)$$

Como F no tiene puntos fijos en el complemento de los U_j, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que:

$$|F(x) - x| > \epsilon_0 \ \text{ para todo } \ x \in I - \bigcup_{j=1}^{n} U_j$$

Si G es cercano a F, G tampoco tiene puntos fijos en esa región. Escogamos $\epsilon < \min_j\{\epsilon_j\}$ así, cualquier difeomorfismo ϵ-cercano a F en la topología C^1 tiene la misma dinámica que F. Por lo tanto, g es Morse-Smale.

Ya probamos que los difeomorfismos Morse-Smale son estructuralmente estables.

Ahora, como f es una aplicación en el círculo, tiene sentido hablar del número de rotación. Existen dos posibilidades: que este número sea racional o que sea irracional.

En el próximo teorema vamos a probar que difeomorfismos con número de rotación irracional no pueden ser estructuralmente estables. Más aún, tales difeomorfismos pueden ser aproximados (con respecto a la distancia en C^r) por funciones con puntos periódicos hiperbólicos. Este resultado es conocido como el *Closing Lemma*. En este documento probaremos lo anterior en el círculo. Para dimensiones mayores, la prueba puede ser consultada en [1].

Antes de probar este teorema, recordemos que un punto $\theta \in \mathbb{S}^1$ es recurrente bajo f si, para cualquier vecindad U de θ, existe $n > 0$ tal que $f^n(\theta) \in U$.

Lema 2. Todo difeomorfismo f: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que preserva la orientación, y con número de rotación irracional, tiene al menos un punto recurrente.

Demostración. Como f tiene número de rotación en los números irracionales, entonces f no tiene puntos periódicos. Si f no tuviera puntos recurrentes, entonces existe $\delta > 0$, tal que $|f^n(\theta) - \theta| > \delta$, para todo $n > 0$ y para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$. Por lo tanto, todas las imágenes de cada $\theta \in \mathbb{S}^1$ son separadas por un arco de longitud δ. Como θ no es periódico, debe haber un número infinito de imágenes de θ, lo cual es una contradicción.

Teorema 10 [*The Closing Lemma*]. Suponga que f es un difeomorfismo de $\mathbb{S}^1$ con número de rotación irracional. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un difeomorfismo g: $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $\|f - g\| < \epsilon$ y cuyo número de rotación es racional.

Demostración. Como f tiene número de rotación irracional por el lema 2, f tiene por lo menos un punto recurrente θ_0. Sea además $U = (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ un arco en el círculo alrededor de θ_0. Como θ_0 es recurrente, existe una sucesión de enteros $n_i \to \infty$ para los cuales$f^{n_i}(\theta_0) \in U$. Supongamos que todos los $f^{n_i}(\theta_0)$ están a un solo lado del arco, es decir, en $(\theta_0 - \delta, \theta_0)$. Vamos a perturbar a f de tal manera que θ_0 se convierta en un punto periódico.

Sea $V \subset U$ una vecindad de θ_0. Consideremos la función salto en V, $\phi \in C^1$, definida como:

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 1 & si \quad \theta \in V \\ 0 & si \quad \theta \in \mathbb{S}^1 - U \end{cases} \tag{20}$$

Consideremos la siguiente función:

$$f_\epsilon(\theta) = f(\theta) + \epsilon\phi(\theta)$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, f_ϵ resulta también ser un difeomorfismo de $\mathbb{S}^1$. De (19) y (20), la distancia en la topología C^r entre f y f_ϵ está dada por:

$$\sup_{\theta \in U} \epsilon \left| \frac{d^r\phi}{d\theta^r}(\theta) \right|$$

Como $\in$ es pequeño, podemos hacer a f_ϵ tan cercano como queramos a f en la topología de C^r. Intuitivamente, f_ϵ se comporta exactamente igual que f en el complemento de U, y cada vez que una órbita encuentra a U, esta avanza $\in$ unidades con respecto a la órbita de f.

Como $f^{n_i}(\theta_0)$ se acumula en θ_0, existe un entero n_i para el cual $f_\epsilon^{n_i}(\theta) \geq \theta_0$. Si hacemos decrecer $\in$ a 0, podremos encontrar un $\in_0$ para el cual $f_{\epsilon_0}^{n_i}(\theta_0) = \theta_0$. Así, tenemos que θ_0 es un punto periódico para f_{ϵ_0}. Hacemos la observación de que estamos buscando que la familia f_ϵ dependa continuamente de $\in$.

Ahora, centramos nuestra atención en la aproximación de difeomorfismos del círculo por difeomorfismos Morse-Smale. El objetivo es probar el siguiente teorema, que es un caso especial del teorema de *Kupka-Smale*. Vamos a dar la prueba en el caso del círculo. Para espacios de dimensión mayor, la prueba puede ser consultada en [54].

Teorema 11. Sea f un difeomorfismo que preserva la orientación en $\mathbb{S}^1$. Para cualquier $\epsilon > 0$, existe un difeomorfismo $g \in C^1$ que es Morse-Smale y que satisface $\|f - g\| < \epsilon$.

Antes de hacer la prueba, hagamos unas reducciones preliminares. Por el *Closing Lemma* podemos asumir que $\rho(f)$ es racional. Sin pérdida de generalidad, $\rho(f) = 0$, es decir, f solo tiene puntos fijos. La prueba de este teorema la vamos a dividir en tres pasos. Primero, vamos a perturbar a f de tal manera que este no tenga intervalos de puntos periódicos. Segundo, probaremos que cualquier difeomorfismo puede ser aproximado por uno que solo tiene puntos aislados. Por último, perturbaremos de nuevo a f de tal manera que estos puntos periódicos aislados se conviertan en puntos periódicos hiperbólicos.

Proposición 1. Sea $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un difeomorfismo que preserva la orientación que satisface $f(\theta) = \theta$ para todo θ en el intervalo $|\theta - \theta_0| \leq 2\pi\delta$. Para cualquier $\epsilon > 0$ existe un difeomorfismo g con $\|f - g\| < \epsilon$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $g(\theta) = f(\theta)$, si $|\theta - \theta_0| \geq 2\pi\delta$
2. $g(\theta) = \theta$
3. $g(\theta) \neq \theta$ si $0 < |\theta - \theta_0| \geq 2\pi\delta$

Demostración. Consideremos $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f tal que $F(x) = x$ para todo x en el intervalo J dado por $|x - x_0| < \delta$.

Vamos a perturbar F dando lugar a una nueva función

$$\tilde{F} \in C^r, \| F - \tilde{F} \| < \epsilon$$

Que tiene a x_0 como único punto fijo en el intervalo J. Definamos una función ϕ que satisface:

$$\begin{cases} \phi(x) \neq 0, \ \ si \quad 0 < |x - x_0| < \delta \\ \phi(x_0) = 1 \\ \phi(x) = 0, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos:

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \mu\phi(x)\sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{\delta}\right)$$

Evidentemente, esta función satisface las propiedades deseadas.

El próximo paso en la demostración del teorema de Kupka-Smale es probar que cualquier difeomorfismo puede ser aproximado por uno que solo tenga puntos aislados. La anterior proposición prueba que los intervalos de puntos fijos pueden ser eliminados mediante perturbaciones de la función original. A continuación, probaremos que cualquier punto de acumulación de puntos fijos puede ser destruido mediante pequeñas perturbaciones.

Proposición 2. Supongamos que f es un difeomorfismo que preserva la orientación en el círculo y que $\rho(f) = 0$. Entonces, existe un C^1 difeomorfismo g que es cercano a f con respecto a la distancia C^1 y que solo tiene puntos fijos aislados.

Demostración. Supongamos que x_0 es un punto de acumulación de puntos fijos del levantamiento F de f. Se tiene que $F'(x_0) = 1$ y $F''(x_0) = 0$. Sea $J = [a, b]$ un intervalo con x_0 en $[a, b]$ y tal que:

$$|F'(x) - 1| < \frac{\epsilon}{4} \tag{21}$$

$$|F(x) - x| < \frac{\epsilon}{4} \tag{22}$$

Además, supongamos que $F'(a) = F'(b) = 1$.

Consideremos $G(x) = F(x) - x$. Se observa de (21) y (22) que $|G(x) - G(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para cualquier $x, y \in J$. Veamos el caso en el que $G(b) - G(a) > 0$. Los casos $G(b) - G(a) = 0$ y $G(b) - G(a) < 0$ son análogos. Por el teorema del valor medio:

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} \leq \max|G'(x)| < \frac{\epsilon}{4}$$

Para $x \in J$. Sea $\phi(x)$ la función salto en J que satisface las siguientes propiedades:

1. $\phi(x) \leq \epsilon/2$ para todo $x \in J$.
2. $\int_a^b \phi(x)dx = G(b) - G(a)$.

Así pues,

$$G(g) - G(a) \leq \frac{\epsilon}{4}(b - a)$$

Por lo tanto, es posible seleccionar ϕ que satisface las condiciones 1 y 2. Definamos:

$$h(x) = G(a) + \int_a^x \phi(t)dt \tag{23}$$

Por el TFC (teorema fundamental del cálculo), h es una función C^1 en J, luego:

$$|h(x) - G(x)| \leq |G(a) - G(x)| + \left|\int_a^b \phi(t)dt\right| \leq \epsilon$$

Y

$$|h'(x) - G'(x)| = |\phi(x) - G'(x)| \leq \epsilon \qquad (24)$$

Por otro lado,

$$\sup_{x\in J}\left|G^{[i]}(x) - h^{[i]}(x)\right| < \epsilon \qquad i = 0,1 \qquad (25)$$

Y

$$\sup_{x\in J}\left|F^{[i]}(x) - h^{[i]}(x)\right| < \epsilon \qquad i = 0,1 \qquad (26)$$

Además, de (23) $h'(x) = \phi(x) > 0$ en , luego, por (24), (25) y (26), se sigue que $h(x) + x$ debe tener un punto fijo en J.

Definamos la aplicación:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & x \notin J \\ h(x) + x & x \in J \end{cases}$$

Como $h'(a) = h'(b) = 0$, se sigue que las derivadas de $\tilde{F}$ en $x = a$ y $x = b$ están bien definidas, y así, $\tilde{F} \in C^1$.

Proposición 3. Si f es un difeomorfismo en $\mathbb{S}^1$ que preserva la orientación y que tiene solamente puntos aislados, entonces existe un difeomorfismo g que tiene solo puntos periódicos hiperbólicos y tal que $\|f{-}g\| < \epsilon$.

Demostración. Consideremos solo el caso en que el levantamiento tiene un punto fijo aislado x_0 con $\tilde{F}(x_0) = 1$. Hay tres casos: x_0 es un atractor, un repulsor, o cuando x_0 atrae de un lado, repele del otro, es decir, es un punto de silla. Analizamos solo el primer caso, los otros casos son similares. Como x_0 es un punto fijo atractor:

$$Existe \quad \delta > 0 \quad tal \quad que \quad |F(x) - F(x_0)| < |x - x_0| \quad cuando \quad |x - x_0| < \delta.$$

Vamos a perturbar a F de tal manera que la función resultante $\tilde{F}$ tenga un único punto fijo hiperbólico en este intervalo. De nuevo, consideremos $\phi(x)$, la función salto, en $|x{-}x_0| < \delta$ con $\phi(x)_0 = 1$. Definamos:

$$\tilde{F} = F(x) - \epsilon\phi(x)\sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{\delta}\right).$$

Tenemos que $\tilde{F}(x_0) = x_0$, pero $\tilde{F}(x) - x| < |x - x_0|$ si $x \neq x_0$ con ϵ suficientemente pequeño. Más aún:

$$\tilde{F}'(x_0) = 1 - \frac{\pi\epsilon}{\delta}$$

Siendo así x_0 un punto fijo hiperbólico. Claramente, si escogemos ϵ lo suficientemente pequeño, $\tilde{F}$ está cerca de F en la topología C^r.

Esto completa la prueba del teorema de *Kupka-Smale*.

El número de rotación y homeomorfismos en el anillo

Muchos resultados obtenidos acerca de la dinámica de homeomorfismos definidos en el anillo están motivados históricamente por sistemas mecánicos y problemas geométricos. Uno de los problemas famosos en la física es el problema de los tres cuerpos, el cual ha sido estudiado ampliamente con resultados interesantes [55]-[61]. Este problema consiste en determinar, en cualquier instante, las velocidades y las posiciones de tres cuerpos de cualquier masa, sometidos entre sí a una atracción mutua y partiendo de unas velocidades y posiciones dadas. Si bien se sabe que es posible dar una fórmula para un sistema similar, pero con dos masas, Poincaré demostró que no existe una fórmula para el problema planteado con tres masas. Euler planteo un problema más débil, llamado el problema de los tres cuerpos restringido, que consiste en asumir que la masa de uno de los tres cuerpos es despreciable respecto de los otros dos, el cual se puede aplicar, por ejemplo, al sistema tierra-luna-sol. Poincaré estudió arduamente este problema, y encontró muchos resultados que tienen que ver con homeomorfismos definidos en el anillo. Entre estos, Poincaré probó el siguiente teorema, cuya prueba puede ser consultada en [62].

Teorema 12 [*Poincaré*]. Dado el anillo definido mediante $0 < a \leq r \leq b$ en el plano r, θ en coordenadas polares, y T una transformación inyectiva del anillo en sí mismo, continua, que preserva el área, y que toma puntos de $r = a$ y los envía en puntos de $r = b$, entonces existen al menos dos puntos en el anillo invariantes por la aplicación T.

El número de rotación en el anillo

En esta sección vamos a definir el número de rotación en el anillo y daremos algunas propiedades acerca de este número y su relación con la existencia de órbitas periódicas. Esta herramienta se ha estudiado ampliamente por diferentes autores, y ha sido usada para el estudio de la existencia de órbitas periódicas en diferentes tipos de mapeos de dos dimensiones [16], [17], [20], [22], [63].

Denotamos el anillo de la siguiente manera:

$$\mathbb{A} = \mathbb{S}^1 \times I \quad donde \quad I = [0,1] \tag{27}$$

Definición 9. Sea $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R} \times I$. Un homeomorfismo $F\colon \tilde{\mathbb{A}} \to \tilde{\mathbb{A}}$ es llamado un *levantamiento de* f si satisface la siguiente relación:

$$f\big(\tilde{\pi}(x,y)\big) = \tilde{\pi}\big(F(x,y)\big) \tag{28}$$

Donde $\tilde{\pi}\colon \tilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{A}$ está dado por:

$$\tilde{\pi}(x,y) = (\pi(x), y)$$

Si F y G son levantamientos de f es fácil ver de (28) que:

$F(x,y) = G(x,y) + (m,0)$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Definición 10. Sea $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un homeomorfismo con la propiedad de preservar la orientación y los componentes de frontera, y sea $F\colon \tilde{\mathbb{A}} \to \tilde{\mathbb{A}}$ un levantamiento de f. El *número de translación* de un punto $\omega = (x,y) \in \tilde{\mathbb{A}}$ bajo F es:

$$\rho_0(F,\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1(F^n(\omega)-\omega)}{n} \tag{29}$$

Donde $p_1\colon \tilde{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}$ es la proyección a la primera coordenada, es decir, $p_1\,(x,y) = x$.

Podríamos suponer que un homeomorfismo en el anillo satisface propiedades similares a los homeomorfismos en el círculo, esto en parte es verdad, muchas de estas propiedades se conservan, pero otras no, por ejemplo, para un homeomorfismo en el anillo no siempre existe $\rho_0\,(\omega, F)$ y cuando este existe raramente es independiente del punto ω. ([64])

Tenemos la siguiente proposición [1]:

Proposición 4. Sea $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un homeomorfismo que preserva la orientación y los componentes de frontera, y sea $F\colon \tilde{\mathbb{A}} \to \tilde{\mathbb{A}}$ un levantamiento de f.

a. Si $\rho_0\,(F, \omega)$ existe, entonces $\rho_0\,(F^m, \omega) = m\rho_0\,(F, \omega)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
b. Si $\rho_0\,(F, \omega,)$ existe, entonces $\rho_0\,(F + (m,0), \omega) = \rho_0\,(F, \omega) + m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para la parte a):

$$\begin{aligned}\rho_0(F^m,\omega) &= \lim_{n\to\infty} \frac{p_1(F^{nm}(\omega)-\omega)}{n}\\ &= m \lim_{n\to\infty} \frac{p_1(F^{nm}(\omega)-\omega)}{mn}\end{aligned} \tag{30}$$

Si hacemos $k = nm$ en (30), el límite toma la siguiente forma:

$$\rho_0(F^m,\omega) = m \lim_{k\to\infty} \frac{p_1(F^k(\omega)-\omega)}{k} = m\rho_0(F,\omega)$$

Ahora, demostremos b). De (29):

$$\begin{aligned}\rho_0(F+(m,0),\omega) &= \lim_{n\to\infty} \frac{p_1\big((F+(m,0))^n(\omega)-\omega\big)}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p_1(F^n(\omega)-\omega)+mn}{n}\\ &= \rho_0(F,\omega)+m\end{aligned}$$

Definición 11. Sea $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un homeomorfismo que preserva la orientación y sea $F\colon \tilde{\mathbb{A}} \to \tilde{\mathbb{A}}$ un levantamiento de f. Se define el *número de rotación de* f como el elemento de $\mathbb{S}^1$ dado por:

$$\rho(f) = \pi\big(\rho_0(F,\omega)\big)$$

Con π: $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la primera componente.

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado, cuya se demostración se fundamenta en los resultados obtenidos para el caso del círculo.

Proposición 5. Sea $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un homeomorfismo que preserva la orientación y los componentes de frontera, y sea $F\colon \tilde{\mathbb{A}} \to \tilde{\mathbb{A}}$ un levantamiento de f.

a. Si ρ_0 (F, ω) existe, entonces $\rho\big(f, \tilde{\pi}(\omega)\big)$ existe y está bien definido, es decir, es independiente del levantamiento F.
b. Si $\rho\,(f, z)$ existe, entonces $\rho(f^n, z) = n\rho(f, z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si ρ_0 (F, ω) existe obviamente $\rho\big(f,\tilde{\pi}(\omega)\big)$ existe, veamos que está bien definido. Sean F y G dos levantamientos de f:

$$\rho\big(f,\tilde{\pi}(\omega)\big) = \pi\big(\rho_0(F,\omega)\big) = \pi(G + (m,0),\omega) =$$

$$\pi\big(\rho_0(G,\omega)\big) = \rho\big(f,\tilde{\pi}(\omega)\big).$$

Teorema 13. Sea h: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un homeomorfismo que preserva la orientación y los componentes de frontera, y que preserva además una medida de probabilidad μ. Sea H un levantamiento de h. Entonces, el número de rotación $\rho(h, x)$ existe para μ-casi todo punto y esta es una función integrable. Si $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ es la función desplazamiento de H:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \rho\,(H,x)d\mu = \int_{\mathbb{S}^1} \phi\, d\mu. \tag{31}$$

Los valores de esas integrales son denotados como $\rho_\mu\,(H)$.

Demostración. Sea $x = \tilde{\pi}\,(\omega)$. Por el teorema ergódico de Birkhoff (ver [49]), la función definida por:

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(h^i(x)\right) \tag{32}$$

Es integrable y satisface:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \phi\, d\mu = \int_{\mathbb{S}^1} \tilde{\phi}\, d\mu$$

Como H es un levantamiento de h, entonces:

$$h^i(x) = h^i(\tilde{\pi}(\omega) = \tilde{\pi}\left(H^i(\omega)\right)$$

Por lo tanto, de (32) se sigue que:

$$\phi\left(h^i(x)\right) = p_1\left(H\left(H^i(\omega)\right) - H^i(\omega)\right)$$

$$= p_1\left(H^{i+1}(\omega) - H^i(\omega)\right)$$

Así pues:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(h^i(x)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} p_1\left(H^{i+1}(\omega) - H^i(\omega)\right)$$

$$= p_1(H^n(\omega) - \omega)$$

Por lo tanto, de (30) tenemos:

$$\rho_0(H,\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1(H^n(\omega) - \omega)}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \phi\left(h^i(x)\right)$$

En consecuencia,

$$\rho_\mu(H) = \int_{\mathbb{S}^1} \rho_0\, d\mu = \int_{\mathbb{S}^1} \phi\, d\mu$$

Aplicaciones del número de rotación en el anillo: el flujo *billiard* y el mapa de retorno geodésico

En esta sección estudiamos dos ejemplos clásicos que dan lugar a funciones en el anillo, y en donde el número de rotación es un insumo fundamental para determinar la existencia de órbitas periódicas.

Flujos *billiards*: en este problema, se considera una bola sobre el borde de una mesa que puede tener diferentes formas. Inicialmente, se trabaja con una mesa circular e imaginamos que se lanza la bola (como en el billar) contra el borde de la región (se supone que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión), entonces, esta rebotará hacia otro punto del borde, y así sucesivamente. De ahí, surge el problema de los flujos *billiards,* y la pregunta natural es: ¿tiene puntos periódicos? Lo anterior puede ser definido por una función en $\mathbb{A} \to \mathbb{S}^1 \times [0, \pi]$, donde $\mathbb{S}^1$ es la parametrización del borde de la región y $\theta \in [0, \pi]$ está definido como el ángulo entre la tangente al borde de la mesa y la dirección en que la bola parte de la frontera.

Si suponemos que x es un punto de contacto, y $\theta \in (0, \pi)$ es el ángulo de reflexión, entonces el *flujo billiard* está definido como:

$$f: \mathbb{A} \to \mathbb{A} \quad ; \quad f(x,\theta) = (x', \theta')$$

Donde x' es el siguiente punto de contacto con el borde de la mesa y θ' el siguiente ángulo de reflexión. Definiendo $f(x, 0) = x$ y $f(x, \pi) = x$ se puede extender f a todo $\mathbb{A}$.

Los flujos *billiards,* y el estudio de sus propiedades, han sido un tema de interés en sistemas dinámicos, y por ello, muchos autores lo han investigado, particularmente, la existencia de puntos periódicos [65]-[68] y [58].

A continuación, se enuncia y demuestra un teorema debido a Birkhoff, que garantiza que el flujo *billiards* preserva áreas (ver [69]).

Teorema 14 [Birkhoff]. Si definimos un área en A usando el elemento de área $\sin\theta dx d\theta$, entonces esta área es preservada por el mapa *billiard*.

Demostración. Dado un punto $x \in \mathbb{S}^1$, lo podemos definir como:

$$\mathbf{x} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

Donde φ es el ángulo formado con la horizontal (eje x), θ es el ángulo formado por la aplicación f y la recta tangente al punto x.

La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = 1$, entonces, derivando implícitamente $2x + 2yy' = 0$ se tiene que $y' = -\frac{x}{y}$. Como $x = \cos\varphi$ y $y = \sin\varphi$, tenemos:

$$y' = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad y \quad \tan\tau = -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$y \quad \tau = \tan^{-1}\left(-\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

Análogamente,

$$tan\tau_1 = -\frac{cos\varphi_1}{sin\varphi_1}, \quad y \quad \tau_1 = tan^{-1}\left(-\frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1 +}\right) \tag{33}$$

$$\begin{cases} \theta & = \alpha - \tau \\ \theta_1 & = \tau_1 - \alpha. \end{cases} \tag{34}$$

Veamos en (34) quién es α en términos de φ y φ_1, donde estos valores son los ángulos de las coordenadas polares de cada uno de los puntos x_1 y x_2 en el círculo, que son el punto de salida y rebote. El segmento de recta que une a $\cos\varphi, \sin\varphi)$ y $\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$ tiene pendiente:

$$\frac{sin\varphi_1 - sin\varphi}{cos\varphi_1 - cos\varphi} \tag{35}$$

Cuando aplicamos F, obtenemos un nuevo punto (θ_1, x_1), donde θ_1 es el ángulo que forma el segmento de recta con la tangente en el punto x_1, que podemos escribir como $x_1 = \cos\varphi 1, \sin\varphi 1)$. Así pues:

$$F: \mathbb{A} \to \mathbb{A}$$

$$(\theta, \varphi) \to F(\theta, \varphi) = (\theta_1, \varphi_1) \tag{36}$$

Para ver que F preserva el área, debemos ver que:

$$\int\int \sin\theta d\theta d\varphi = \int\int \sin\theta_1 . J(F) d\theta_1 d\varphi_1$$

Donde $J(F)$ representa el jacobiano de la transformación:

$$J\big(f(\theta,\varphi)\big) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} \end{vmatrix}$$

En realidad, lo que debemos probar es que:

$$J(f) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$$

Se sigue de (33) y (34) que:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi}$$

Por lo tanto:

$$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{sin\varphi_1 - sin\varphi}{cos\varphi_1 - cos\varphi}\right) \tag{37}$$

Así, de (36) y (37):

$$F: \begin{cases} \theta & = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi}\right) = L(\varphi, \varphi_1) \\ \theta_1 & = \tan^{-1}\left(-\dfrac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi}{\cos\varphi_1 - \cos\varphi}\right) = M(\varphi, \varphi_1) \end{cases}$$

Esta transformación define la aplicación *billiard* F y, además:

$$d\theta = \frac{\partial L}{\partial \varphi}.d\varphi + \frac{\partial L}{\partial \varphi_1}.d\varphi_1 \tag{38}$$

$$d\theta_1 = \frac{\partial M}{\partial \varphi}.d\varphi + \frac{\partial M}{\partial \phi_1}.d\varphi_1, \tag{39}$$

Luego, de (38):

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \frac{\partial M}{\partial \varphi}.d\varphi + \frac{\partial M}{\partial \varphi_1}\left[\frac{d\theta - (\partial L/\partial\varphi).d\varphi}{(\partial L/\partial\varphi_1)}\right] \\ &= \frac{\partial M/\partial\varphi}{\partial L/\partial\varphi_1}.d\theta + \left[\frac{\partial M}{\partial\varphi} - \frac{-(\partial M/\partial\varphi_1)(\partial L/\partial\varphi)}{(\partial L/\partial\varphi_1)}\right]d\varphi \end{aligned}$$

De donde:

$$d\varphi_1 = \frac{1}{(\partial L/\partial\varphi_1)}.d\theta - \frac{(\partial L/\partial\varphi)}{(\partial L/\partial\varphi_1)}.d\varphi$$

Hacemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta_1}{\partial\theta}.\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} &= \left(\frac{M_{\varphi_1}}{L_{\varphi_1}} + \left(M_\varphi - \frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L_{\varphi_1}}\right).\frac{d\varphi}{d\theta}\right)\left(\frac{1}{L_{\varphi_1}}\frac{d\theta}{d\varphi} - \frac{L_\varphi}{L_{\varphi_1}}\right) \\ &= \left(\frac{M_{\varphi_1}}{L_{\varphi_1}}.\frac{1}{L_{\varphi_1}}.\frac{d\theta}{d\varphi}\right) + \left(\left[M_\varphi - \frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L_{\varphi_1}}\right]\frac{1}{L_{\varphi_1}}\right) - \\ &\quad - \left(\frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L^2_{\varphi_1}}\right) - \left(\left[M_\varphi - \frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L_{\varphi_1}}\right]\frac{d\varphi L_\varphi}{d\theta L_{\varphi_1}}\right) \\ &= \left(\frac{M_{\varphi_1}d\theta}{L^2_\varphi d\varphi}\right) + \left(\frac{M_\varphi}{L_{\varphi_1}}\right) - \left(\frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L^2_\varphi}\right) - \left(\frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L^2_\varphi}\right) - \\ &\quad - \left(\frac{M_\varphi d\varphi L_\varphi}{d\theta L_{\varphi_1}}\right) + \left(\frac{M_{\varphi_1}L^2_\varphi d\varphi}{L^2_{\varphi_1}}d\theta\right) \end{aligned} \tag{40}$$

De manera similar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} &= \left(\frac{M_{\varphi_1}d\theta}{L_{\varphi_1}d\varphi} + \left(M_\varphi - \frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L_{\varphi_1}}\right)\right)\left(\frac{1}{L_{\varphi_1}} - \frac{L_{\varphi_1}}{L_{\varphi_1}}\frac{d\varphi}{d\theta}\right) \\ &= \left(\frac{M_{\varphi_1}d\theta}{L^2_\varphi d\varphi}\right) + \left(\frac{M_{\varphi_1}}{L_{\varphi_1}}\right) - \left(\frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L^2_\varphi}\right) - \left(\frac{M_{\varphi_1}L_\varphi}{L^2_{\varphi_1}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{M_\varphi L_\varphi d\varphi}{L_{\varphi_1}d\theta}\right) + \left(\frac{M_{\varphi_1}L^2_\varphi d\varphi}{L^2_\varphi d\theta}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

Restando (40) y (41) se tiene:

$$J(F) = \frac{\partial\theta_1}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} = -\frac{M_\varphi}{L_{\varphi_1}} \tag{42}$$

Y de (33), (34) y (35):

$$M_\varphi = \frac{(-cos\varphi)(cos\varphi_1 - cos\varphi) - (sin\varphi).(sin\varphi_1 - sin\varphi)}{(cos\varphi_1 - cos\varphi)^2} \tag{43}$$

$$L_{\varphi_1} = \frac{(cos\varphi_1)(cos\varphi_1 - cos\varphi) - (sin\varphi_1).(sin\varphi_1 - sin\varphi)}{(cos\varphi_1 - cos\varphi)^2} \tag{44}$$

De (42), (43) y (44) se concluye que:

$$J(F) = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$$

Con lo cual queda demostrado el teorema.

De lo anterior se sigue, de manera inmediata, la existencia de órbitas periódicas.

El mapa de retorno geodésico en $\mathbb{S}^2$: otro problema interesante y ampliamente estudiado en el campo de los sistemas dinámicos y de la física es la existencia de geodésicas cerradas [70], [71]. Una manera clásica de tratar de dar respuesta a este problema es minimizar la longitud de una curva cerrada en su clase de homotopía. Esto no es aplicable para la esfera, pues todas las curvas cerradas son homotópicas a curvas con longitud tan pequeña como se quiera. Sin embargo, si se trabaja en una métrica riemanniana, Birkhoff probó la existencia de al menos una geodésica cerrada en $\mathbb{S}^2$.

Los siguientes resultados son debidos a Birkhoff, y sus pruebas se pueden consultar en [62].

Teorema 15 [*Birkhoff*]. Dada una métrica riemanniana en $\mathbb{S}^2$, siempre existe una geodésica cerrada simple.

Los estudios de Birkhoff llevaron a concluir que, al igual que en el problema de los *billiard*, la existencia de geodésicas cerradas en la esfera podría reducirse a estudiar un homeomorfismo del anillo. Para $\gamma \subset \mathbb{S}^2$ una geodésica cerrada simple, la aplicación de retorno sobre geodésicas F: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ para está definido por:

$$f(x,\theta) = F(x',\theta')$$

Donde x' es el segundo punto donde y es intersectada por una geodésica que parte de x y forma un ángulo θ con y, y θ' es el nuevo ángulo.

Teorema 16. Si el mapa de retorno de geodésicas está bien definido, entonces es un difeomorfismo que preserva el área.

Esto llevó a estudiar la existencia de órbitas periódicas para homeomorfismos que preservan el área del anillo. Se puede evidenciar una relación entre las geodésicas cerradas y las órbitas periódicas del mapa de retorno de geodésicas. Enunciamos los siguientes resultados debidos a Franks y Bangert (ver [22], [20]).

Teorema 17 [*Franks*]. Sea h: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un difeomorfismo con la propiedad de preservar el área, la orientación y los componentes de frontera. Si f posee por lo menos un punto periódico, entonces tiene infinitos de estos puntos.

Teorema 18 [*Bangert*]. Si la función de retorno geodésico no está bien definida, se puede garantizar la existencia de infinitas geodésicas cerradas en $\mathbb{S}^2$.

Estos dos resultados son claves, pues permiten garantizar que, para toda métrica riemanniana en $\mathbb{S}^2$, se tiene un número infinito de geodésicas cerradas. Esto fue un problema abierto durante mucho tiempo.

Conclusiones

Con base en los resultados estudiados del número de rotación en el círculo y en el anillo, podemos determinar las siguientes conclusiones:

- El número de rotación es un invariante de conjugación topológica y permite garantizar la existencia de puntos periódicos en homeomorfismos definidos en el círculo cuando este es racional.
- En homeomorfismos definidos sobre el anillo no siempre existe el número de rotación. Sin embargo, cuando existe, se puede garantizar la existencia de puntos periódicos.
- Usando el teorema ergódico de Birkhoff se puede relacionar el número de rotación y la función de desplazamiento mediante un operador integral sobre una medida invariante. Esto aplica, tanto en el círculo, como en el anillo.
- En un difeomorfismo que preserva la orientación se puede garantizar la existencia de puntos recurrentes cuando el número de rotación es irracional.
- El flujo *billiard* preserva el área y, usando el número de rotación, se demuestra que este tiene puntos periódicos cuando es racional.

En resumen, el número de rotación es una importante herramienta para estudiar la existencia de puntos periódicos de diferentes tipos de funciones definidas sobre el círculo y el anillo. Se espera que con este material, que recopila una parte importante de la teoría del número de rotación en el círculo y en anillo, se incentive a los lectores a continuar explorando el número de rotación en dimensiones mayores.

Referencias

[1] C. Robinson, *Dynamical systems*, Second edition. New York: CRC, press, 1999, DOI: https://doi.org/10.1201/9781482227871

[2] M. Brin y G. Struck, *Introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, 2002, DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511755316

[3] A. Michel y L. Hou y D. Liu, "Stability of Dynamical Systems", *Systems and Control*, Birkhauser, 2008, DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4649-3

[4] C. Siegel y K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971, DOI: https://doi.org/10.1137/1015087.

[5] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 1990, DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8

[6] O. Galor. *Discrete Dynamical Systems*, Springer, 2007, DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-36776-4

[7] M. Hirsch y S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, New York: Academic Press, 1974, DOI: https://doi.org/10.1137/1018025

[8] J. Franks y M. Shub, "The existence of Morse-Smale diffeomorphism", *Topology*, vol. 20, no. 3, pp. 273-290, 1981, DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(81)90003-3

[9] J. Moser, "Dynamical Systems, Theory and Applications", *Lecture Notes in Physics*, Springer, 1975, DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-07171-7

[10] R. Devaney, *An introduction to chaotic to dynamical systems*, Persens Publishing Co, 1999, DOI: https://doi.org/10.1201/9780429280801

[11] G. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1966, DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7_1

[12] C. Bonatti, "Generic Properties of dynamical system", *CNRS and institud de mathematique de Bourgogne,* Francia, 2 de sep 2005, DOI: https://doi.org/10.1016/B0-12-512666-2/00164-4

[13] J. Sotomayor, *Licoes de equacoes diferenciais ordinarias*, Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1979.

[14] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, *Introductory lectures*, Institute of Mathematical Sciences, New York: SUNY, 1990, DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9201272

[15] J. Palis y W. Melo, *Introducao aos sistemas dinámicos*, IMPA: Junio de 1975.

[16] J. Franks, "Rotation number and instability sets", *American mathematical Society*, vol. 40, pp. 263-277, 2003, DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0303292

[17] J. Franks, "Rotation vector and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 348, pp. 2637-2662, 1996, DOI: http://www.jstor.org/stable/2155263

[18] J. Franks, "Homology and dynamical systems", *Amer. Math. Soc.*, vol. 49, pp. 57- 92, 1993, DOI: https://www.ams.org/books/cbms/049/cbms049-endmatter.pdf

[19] J. Franks, "Geodesics on S2 and periodic points of annulus homeomorphisms", *Inventiones Math.*, vol. 108, pp. 403-418, 1992, DOI: https://doi.org/10.1007/BF02100612

[20] J. Franks, "Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero", *New York Journal of Math*, vol. 2, pp. 1-19, 1996, http://eudml.org/doc/119495

[21] J. Franks, "Periodic points of Hamiltonian surface diffeomorphisms", *Geometry and Topology*, vol. 7, pp. 713-756, 2003, DOI: https://doi.org/10.2140/gt.2003.7.713

[22] J. Franks, "Periodic points and rotation number for area preserving diffeomorphisms on the plane", *Publications Mathematique de L' I.M.E.S.,* vol. 71, pp. 105-120, 1990, DOI: https://doi.org/10.1007/BF02699879

[23] J. Franks, "Regions of instability for non-twist maps", to appear in Ergodic Theory and Dynamical System, DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9910152

[24] M. Handel, "The rotation set of a homeomorphism of the annulus is closed", *Comm.Math. Phys.*, vol. 127, no. 2, pp. 339-349, 1990, DOI: https://doi.org/10.1007/BF02096762

[25] M. Herman, "Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number", *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, vol. 16, no. 1, pp. 45-83, 1985, DOI: http://doi.org/10.1007/bf02584836

[26] S. Novo y C. Núnez, and R. Obaya, "Ergodic Properties and Rotation Number for Linear Hamiltonian Systems", *Journal of Differential Equations*, vol. 148, no. 1, pp. 148-185, 1998, DOI: http://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3469

[27] M. Zhang y R. Obaya, "The Rotation Number Approach to the Periodic Fuc caron ik Spectrum",

Journal of Differential Equations, vol. 185, no. 1, pp. 74-96, 2002, DOI: http://doi.org/10.1006/jdeq.2002.4168

[28] R. Pavani, "A numerical approximation of the rotation number", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 73, no. 2-3, pp. 191-201, 2002, DOI: http://doi.org/10.1016/0096-3003,%2894%2900249-5

[29] H. Veldhuizen, "On the numerical approximation of the rotation number", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 21, no. 2, pp. 203-212, 1988, DOI: http://doi.org/10.1016/0377-0427%2888%2990268-3

[30] R. Pavani, "The numerical approximation of the rotation number of planar maps", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 33, no. 5, pp. 103-110, 1997, DOI: http://doi.org/10.1016/s0898-1221%2897%2900023-0

[31] A. Lambert y R. Limaand y R. Vilela, "Rotation number and Lyapunov exponent in two-dimensional maps", *Physical D: Nonlinear Phenomena*, vol. 34, no. 3, pp. 336-377, 1989, DOI: http://doi.org/10.1016/0167-2789 %2889%2990261-3

[32] R. Johnson, "Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients", *Journal of Differential Equations*, vol. 61, no. 1, pp. 54-78, 1986, DOI: http://doi.org/10.1016/0022-0396%2886%2990125-7

[33] F. Puel, "The rotation number of bounded orbits in a central fix", *Celestial Mechanics*, vol. 29, no. 3, pp. 255-266, 1983, DOI: http://doi.org/10.1007/bf01229139

[34] H. Feng y M. Zhang, "Optimal estimates on rotation number of almost periodic systems", *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP*), vol. 57, no. 2, pp. 183-204, 2006, DOI: http://doi.org/10.1007/s00033-005-0020-y

[35] K. Jaroslaw, "Poincaré rotation number for maps of the real line with almost periodic displacement", *Institute of Physics*, vol. 13, no. 5, pp. 1841-1854, 2000, DOI: http://doi.org/10.1007/s00209-012-1071-3

[36] A. Navas y M. Triestino, "On the invariant distributions of C2 circle diffeomorphisms of irrational rotation number", *Mathematische Zeitschrift*, vol. 274, no. 1-2, pp. 315-321, 2013, DOI: http://doi.org/10.1088/0951-7715%2F13%2F5%2F320

[37] L. Bates y R. Cushman y E. Savev, "The rotation number and the herpolhode angle in Euler's top", *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP*), vol. 56, no. 2, pp. 183-191, 2005, DOI: http://doi.org/10.1007/s00033-004-2082-7

[38] R. Johnson y J. Moser, "The rotation number for almost periodic potentials", *Communications in Mathematical Physics*, vol. 90, no. 2, pp. 317-318, 1983, DOI: http://doi.org/10.1007/bf01205510

[39] M. Bobino, "Lefschetz index for orientation reversing planar homeomorphisms", *Proceeding of the American mathematical society*, vol. 130, no 7, pp. 2173-2177, 2002, http://www.jstor.org/stable/2699825

[40] I. Pesin, "Caratheodory theory of prime ends", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 7, no. 5, pp. 868-870, 1966, DOI: http://doi.org/10.1007/bf01044491

[41] E. Collingwood y G. Piranian, "The structure and distribution of prime ends", *Archiv der Mathematik*, vol. 10, no. 1, pp. 379-386, 1959, DOI: http://doi.org/10.1007/bf0124081

[42] D. Epstein, "Prime Ends", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s3-42, no. 3, pp. 385-414, 1981, DOI: http://doi.org/10.1112/plms%2Fs3-42.3.385

[43] E. Schlesinger, "Conformal Invariants and Prime Ends", *American Journal of Mathematics*, vol. 80, no. 1, pp. 83-102, 1958, DOI: http://doi.org/10.2307/2372822

[44] A. Koropecki y L. Patrice y N. Meysam, "Prime ends rotation numbers and periodic points", *Duke Mathematical Journal*, vol. 164, no. 3, pp. 403-472, 2015, DOI: http://doi.org/10.1215/00127094-2861386

[45] V. Ryazanov y S. Volkov "Prime ends in the mapping theory on the Riemann surfaces", *Journal of Mathematical Sciences,* vol. 227, no. 1, pp. 81-97, 2017, DOI: http://doi.org/10.1007/s10958-017-3575-1

[46] X. Liao y L.Q. Wang y P. Yu, *Stability of Dynamical Systems. Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity 5*, Elsevier, 2007.

[47] C. Robinson, "Closing stable and unstable manifolds on two spheres", *Proc. Amer. Math. Soc.,* vol. 41, pp. 299-303, 1973, DOI: https://doi.org/10.2307/2038860

[48] V. Ginzburg y Z. Basak, "Hyperbolic fixed points and periodic orbits of Hamiltonian diffeomorphisms, *Duke Mathematical Journal*, vol. 163, no. 3, pp. 565-590, 2014, DOI: http://doi.org/10.1215/00127094-2410433

[49] M. Viana, *Introducao ao teoría ergódica*, Curso de Verao de Recife, IMPA, enero de 2003.

[50] G.B Gustafson, "Differential Equations, Linear Algebra and Dynamical Systems (Morris W. Hirsch and Stephen Smale)", *SIAM Review Journal*, vol. 18, 1976.

[51] J. Franks, "Some smooth maps with infinite many hyperbolic periodic points", *Transactions of the American Mathematical Society,* vol. 226, pp. 175-176, 1997, DOI: http://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0436221-3

[52] M. Benalili, "Linearization of vector fixed and embedding of diffeomorphisms in flows via Nash–Moser theorem", *Journal of Geometry and Physics,* vol. 61, no. 1, pp. 62-76, 2011, DOI: http://doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.08.009

[53] M. Benalili, "Lemma on Hyperbolic Fixed Points of Diffeomorphisms", *Russian Mathematical Surveys,* vol. 29, no. 2, pp. 236-241, 1974, DOI: http://doi.org/10.1070/RM1974v029n02ABEH003858

[54] De Melo E, "Lectures on one dimensional dynamics", 17 Coloquio brasileiro de matemáticas, IMPA.

[55] P. Sconzo, "Contribution to the solution of the three-body problem in power series form", *Astronomische Nachrichten*, vol. 290, no. 4, pp. 163-170, 1967, DOI: http://doi.org/10.1002/asna.19672900405

[56] F. Diacu, "Poincaré and the Three Body Problem". *By June Barrow Green, Historia Mathematica*, vol. 26, no. 2, pp. 175-178, 1999, DOI: http://doi.org/10.1006/hmat.1999.2236

[57] E. Lacomba, "Regularization by surgery in the restricted three body problem", *Journal of Differential Equations*, vol. 24, no. 2, pp. 240-252, 1977, DOI: http://doi.org/10.1016/0022-039628772990148-6

[58] R. Easton, "Parabolic orbits in the planar three body problem", *Journal of Differential Equations*, vol. 52, no. 1, pp. 116-134, 1984, DOI: http://doi.org/10.1016/0022-0396%2884 %2990138-4

[59] A. Baz, "Particular case of the three-body problem", *Nuclear Physics*, vol. 51, pp. 145-154, 1964, DOI: http://doi.org/10.1016/0029-5582 %2864 %2990258-5

[60] W. Glockle, "Studies of the three-body problem", *Nuclear Physics* A, vol. 175, no. 2, pp. 337-349, 1971, DOI: http://doi.org/10.1016/0375-9474 %2871 %2990286-7

[61] F. Lanford, "Functional equations for circle homeomorphisms with golden ratio rotation number", *Journal of Statistical Physics,* vol. 34, no. 1-2, pp. 57-73, 1984, DOI: http://doi.org/10.1007/bf01770349

[62] D. Birkhoff, "Proof of Poincaré geometric theorem", *Trans. Amer. Math. Soc*., vol. 14, pp. 14-22, 1913, DOI: https://doi.org/10.2307/1988766

[63] G. Hall. "Some problems on dynamics of annulus maps Hamiltonian Dynamical Systems", *Contemporary Mathematics. Amer. Math. Soc*, vol. 81, 1987.

[64] Z. Xia, "Area preserving surface diffeomorphisms", *Nacional Science Foundation*, Illinois, 1996.

[65] E. Aurell y C. Itzykson, "Rational billiards and algebraic curves", *Journal of Geometry and Physics*, vol. 5, no. 2, pp. 191-208, 1988, DOI: http://doi.org/10.1016/0393-0440 %2888 %2990004-6

[66] S. Hyewon y J. Bang y J. Park; S. Jeon, "Billiards game with haptic interface", *Computer Animation and Virtual Worlds*, vol. 21, no. 5, pp. 523-530, 2010, DOI: http://doi.org/10.1002/cav.337

[67] B. Lubachevsky, "How to simulate billiards and similar systems", *Journal of Computational Physics* vol. 94, no. 2, pp. 255-283, 1991, DOI: http://doi.org/10.1016/0021-9991%2891%2990222-7

[68] N. Chernov, "Topological entropy and periodic points of two-dimensional hyperbolic billiards", *Functional Analysis and Its Applications*, vol. 25, no. 1, pp. 39-45, 1991, DOI: http://doi.org/10.1007/bf01090675

[69] M. Rychlik, "Periodic points of the billiard ball map in a convex domain", *J. Differential Geometry*, vol. 30, pp. 191-205, 1989.

[70] A. Canino, "Existence of a closed geodesic on p-convex sets", *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non-Linear Analysis*, vol. 5, no. 6, pp. 501-518, 1991, DOI: http://doi.org/10.1016/s0294-1449 %2816%2930333-x

[71] A. Masiello, "On the Existence of a Closed Geodesic in Stationary Lorentz Manifolds", *Journal of Differential Equations,* vol. 104, no. 1, pp. 48-59, 1993, DOI: http://doi.org/10.1006/jdeq.1993.1063