Revista Facultad de Ciencias Básicas 2020 Vol. 16(2)
julio - diciembre ■ ISSN: 1900-4699 · e-ISSN: 2500-5316 ■ pp. 77-85

Editorial Neogranadina

DOI: https://doi.org/10.18359/rfcb.5441

Generación de las matrices de espín de Pauli a partir de los vectores de Jones*

Brahan Armando Hurtado Murcia[a] ■ Hernando González Sierra[b] ■ Jairo Alonso Mendoza Suárez[c]

Resumen: usando los estados de polarización de la luz representados por vectores de Jones que pertenecen a un espacio vectorial lineal complejo de una dimensión, se elaboran estructuras algebraicas que son conocidas como diadas o tensores de segundo orden que en este caso conforman un espacio vectorial complejo de dos dimensiones. Con estos tensores de segundo orden, que se pueden expresar de forma matricial, se construyen secuencias de relaciones de conmutación con alternancia de los estados de polarización de la luz. Las secuencias de relaciones de conmutación, con la propiedad de alternancia dada por la permutación de los estados de polarización de la luz, se presentan como combinaciones lineales que generan de forma simple las matrices de espín de Pauli. Los estados de polarización de los vectores de Jones utilizados para construir las secuencias de las relaciones de conmutación de las formas diádicas pertenecen a formas de tipo circular, a la izquierda y a la derecha, o lineal. La transición de un espacio vectorial complejo, en la que actúan los vectores de Jones, a un espacio vectorial lineal complejo de dos dimensiones, en el que la base de este último espacio lo conforman la matriz unidad y las matrices de espín de Pauli, es factible a través de relaciones de conmutación empleando vectores de Jones en estados de polarización lineal y circular.

Palabras clave: polarización; diadas; espín; tensores; conmutadores

Recibido: 20 de noviembre de 2020

Aceptado: 11 de marzo de 2021

Disponible en línea: 27 de agosto de 2021

Cómo citar: B. A. Hurtado, H. González Sierra y J. A. Mendoza Suárez, «Generación de las matrices de espín de Pauli a partir de los vectores de Jones», Rev. Fac. Cienc. Básicas, vol. 16, n.º 2, pp. 77-85, ago. 2021.

* Artículo de investigación. Los autores agradecen a la Universidad Surcolombiana, a través de la Vicerrectoría de Investigación y Proyección Social, por el apoyo económico dado para la elaboración de este artículo a través de la financiación dada al Grupo de Investigación de Física Teórica.

a Ph. D. en Física, Universidad Surcolombiana, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Neiva, Colombia. Correo electrónico: u20161149068@usco.edu.co ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6138-6857

b Ph. D. en física, Universidad Surcolombiana, facultad de ciencias exactas y naturales. Correo electrónico: hergosi@usco.edu.co ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4025-3243

c Dr. Ciencias Naturales Física, Universidad de Pamplona, Departamento de Física y Geología, Pamplona, Colombia. Correo electrónico: jairoalonsos@gmail.com ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7164-8010

Generation of Pauli Spin Matrices from Jones Vectors

Abstract: using the states of polarization of light represented by Jones vectors that belong to a complex linear vector space of one-dimension, algebraic structures are elaborated that are known as dyads or second-order tensors that in this case make up a complex vector space of two dimensions. With these second-order tensors, which can be expressed in a matrix form, sequences of switching relations are constructed with alternating states of light polarization. The sequences of commutation relations, with the property of alternation given by the permutation of the polarization states of light, are presented as linear combinations that generate Pauli spin matrices in a simple way. The polarization states of the Jones vectors used to construct the sequences of the commutation relations of the dyadic forms belong to forms of the circular, left and right, or linear type. The transition from a complex vector space, in which the Jones vectors act, to a complex linear vector space of two dimensions, in which the base of this last space is made up of the unit matrix and the Pauli spin matrices, is feasible through commutation relations using Jones vectors in states of linear and circular polarization.

Keywords: polarization; dyads; spin; tensioners; switches

Geração das matrizes de spin *de Pauli a partir dos vetores de Jones*

Resumo: a partir do uso dos estados de polarização da luz representados por vetores de Jones que pertencem a um espaço vetorial linear complexo de uma dimensão, são elaboradas estruturas algébricas que são conhecidas como "díades" ou "tensores de segunda ordem" que, nesse caso, conformam um espaço vetorial complexo de duas dimensões. Com esses tensores de segunda ordem, que podem ser expressos de forma matricial, são construídas sequências de relações de comutação com alternância dos estados de polarização da luz. As sequências de relações de comutação, com a propriedade de alternância dada pela permutação dos estados de polarização da luz, são apresentadas como combinações lineares que geram de forma simples as matrizes de *spin* de Pauli. Os estados de polarização dos vetores de Jones utilizados para construir as sequências das relações de comutação das formas díades pertencem a formas de tipo circular, à esquerda e à direita ou linear. A transição de um espaço vetorial complexo, no qual os vetores de Jone agem, a um espaço vetorial linear complexo de duas dimensões, no qual a base deste último espaço é conformada pela matriz unidade e as matrizes de *spin* de Pauli, é factível por meio de relações de comutação e da utilização de vetores de Jones em estados de polarização linear e circular.

Palavras-chave: polarização; díade; *spin*; tensores; comutadores

Introducción

La luz cuando se propaga por el espacio libre se comporta como una onda electromagnética (EM) [1]. La orientación geométrica de las oscilaciones de esta onda es transversal, es decir la dirección de la oscilación de los campos eléctrico (E) y magnético (B) es perpendicular a la dirección del movimiento (propagación) de la onda, lo que permite aplicar la propiedad de la polarización [2], cuya interpretación es proporcionada por la óptica física más comúnmente denominada óptica ondulatoria [3].

La polarización es una propiedad fundamental de la radiación electromagnética. Ella proporciona información importante del campo magnético y eléctrico, además permite describir las características internas como el estudio de objetos astronómicos. La polarización ha sido usada para mapear el campo magnético solar y estelar [4], caracterizar la composición superficial de cuerpos del sistema solar [5], contribuir al descubrimiento de la radiación sincrotrón en objetos astronómicos [6] y ayudar al descubrimiento y caracterización de campos magnéticos galácticos de larga escala [7]. Lo que hace importante estudiar en detalle el fenómeno de polarización de la luz, y básicamente su formulación matemática.

En la descripción de la polarización de la luz [8], en el contexto de la óptica ondulatoria, se introducen el cálculo de Jones y los vectores de Jones como herramientas matemáticas útiles [8]. Los vectores de Jones se incluyen con el fin de representar los diferentes estados de polarización de la luz [9].

Cuando se estudia la polarización de la luz, considerada como una onda electromagnética, no se supone que esté compuesta por partículas llamadas fotones, debido a que esta última imagen corresponde a la naturaleza corpuscular [10] de la radiación electromagnética y estas dos perspectivas son excluyentes [11].

La naturaleza corpuscular de la luz es adoptada por la teoría cuántica [12], en donde la luz se asume estar conformada por paquetes de energía llamados fotones. Las interacciones entre los fotones y la materia son adecuadamente descritas en la teoría cuántica para energías que estén en la región del ultravioleta del espectro electromagnético y energías aún mayores. La teoría cuántica proporciona interpretaciones adecuadas del efecto fotoeléctrico, la producción de rayos x, el efecto Compton y la producción y aniquilación de pares partícula-antipartícula [13].

En la electrodinámica cuántica, teoría que fusiona la electrodinámica clásica con la teoría cuántica, los fotones son partículas de espín entero que obedecen la estadística de Bose-Einstein [14], mientras las partículas con espín semientero, como, por ejemplo, los electrones, obedecen la estadística de Fermi-Dirac [15].

La ecuación de Dirac de la mecánica cuántica relativista que describe el comportamiento cuántico de los electrones [16] incorpora las matrices de espín de Pauli [17], cuyas propiedades se esbozan más adelante. Aparentemente no existe relación entre los vectores de Jones y las matrices de espín de Pauli. En consecuencia: a) desde el punto de vista matemático los vectores son tensores de orden uno [18] y las matrices de espín de Pauli son tensores de segundo orden [19], pero comparten la propiedad común de que ellos residen en espacios complejos [20]; b) desde el punto de vista físico, el de la teoría cuántica de campos [21], los vectores de Jones provienen de los fotones (bosones) [22] y las matrices de Pauli de partículas de espín semientero (fermiones) [23].

En este artículo se usa el concepto de diada [24], una particularidad de los tensores, con el propósito de transformar los vectores de Jones del espacio vectorial complejo a un espacio tensorial complejo, y mostrar una conexión matemática con las matrices de espín de Pauli.

El artículo está distribuido de la siguiente manera. En la primera sección se revisa la polarización de la luz y su representación por vectores de Jones, en la segunda se presenta una ilustración de las matrices de espín de Pauli. En la tercera se define lo que es una diada y se introducen las formas nónicas[25] y cuárticas de una diada [26], en la cuarta se emplean los vectores de Jones para obtener formas cuárticas de diadas y se determinan sus propiedades. La cuarta sección es parte central de la contribución en la que se deriva una conexión entre las formas cuarticas de las diadas y las matrices de espín de Pauli. Por último, se presentan las conclusiones y una discusión de los resultados.

Polarización de la luz y vectores de Jones

Los vectores de Jones son representaciones de los estados de polarización de la luz y pueden ser usados para describir luz completamente polarizada [27].

En 1941, R.C Jones introdujo un álgebra matricial dos-dimensional para describir la polarización de la luz y su influencia en los dispositivos ópticos que tienen que ver con la polarización [28]. El álgebra es aplicada a la luz que tiene una polarización definida, tal como las ondas planas, pero no es aplicable en luz no-polarizada o parcialmente polarizada [29]. Para la luz parcialmente polarizada, un algebra de cuatro dimensiones conocida como cálculo de Jones es aplicable [30].

Las soluciones a las ecuaciones de Maxwell en forma de ondas planas, en el caso del campo eléctrico, por ejemplo, están dadas por [31]:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r} - wt)} \tag{1}$$

En donde $\vec{k}$ es el vector de onda que determina la dirección de propagación y w es la frecuencia angular. Si se orienta el sistema de coordenadas tomando el eje z como la dirección de $\vec{k}$ la ecuación (1) se puede escribir en la forma [32]:

$$\vec{E}(z,t) = \left(E_x\hat{x} + E_y\hat{y}\right)e^{i(kz-wt)} \tag{2}$$

Solo la parte real de la ecuación (2) tiene importancia física. La relación entre las amplitudes complejas E_x, E describen la polarización de la luz, de tal forma que se tienen diversos estados de polarización que pueden ser descritos por un vector de Jones cuya estructura se define mediante [33]:

$$\vec{J} = A\hat{x} + Be^{i\delta}\hat{y} \tag{3}$$

δ es la diferencia de fase entre las componentes del campo eléctrico E_x, E_y y A, B, están definidas como,

$$A = \frac{E_x}{\sqrt{|E_x|^2 + \left|E_y\right|^2}} \tag{4}$$

$$B = \frac{E_y}{\sqrt{|E_x|^2 + \left|E_y\right|^2}} \tag{5}$$

Una expresión equivalente para un vector de Jones es la de vector columna [34], útil para sus manipulaciones en el álgebra matricial, así:

$$\vec{J} \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ Be^{i\delta} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$\vec{J}$ contiene la información sobre el estado de polarización de la luz y es una especie de vector unitario:

$$\vec{J}.\vec{J}^* = 1 \tag{7}$$

$\vec{J}^*$ es el complejo conjugado de , de tal forma que la ecuación (7) es una condición de normalización [35] del vector de Jones.

Los estados de polarización de los vectores de Jones —adecuadamente normalizados— más usuales están representados por las siguientes expresiones [36]:

$$\boldsymbol{J_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{J_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{J_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{J_4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{J_5} = \begin{pmatrix} cos\alpha \\ sen\alpha \end{pmatrix} \tag{12}$$

La ecuación (8) representa luz con polarización lineal a lo largo del eje x, la ecuación (9) luz con polarización lineal a lo largo del eje y, la ecuación (10) luz con polarización circular a la derecha, la ecuación (11) luz con polarización circular a la izquierda y la ecuación (12) polarización lineal en ángulo con respecto al eje x.

Las matrices de espín de Pauli

La teoría del espín [37] es similar a la teoría del momento angular [38]. El espín está representado por un operador vectorial $\vec{S}$ cuyas componentes $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$, obedecen las mismas relaciones de conmutación del momento angular [39].

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z \quad (12a)$$

$$[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x \quad (12b)$$

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y \quad (12c)$$

Adicionalmente, $\vec{S}^2$ y $\hat{S}_z$ conmutan; por tanto, tienen los mismos vectores propios [40]:

$$\vec{S}^2|s, m_s >= s(s+1)\hbar^2|s, m_s >$$

$$\hat{S}_z|s, m_s >= m_s\hbar|s, m_s$$

Donde $m_s = -s, -s+1, \ldots \ldots s$. Similarmente tenemos:

$$\vec{S}_\pm|s, m_s >= \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)}\hbar|s, m_s \pm 1 >$$

Donde $\vec{S}_\pm = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$. Cuando $s = 1/2$ es conveniente introducir las matrices de espín de Pauli σ_x, σ_y, σ_z, las cuales están relacionadas con el vector de espín por medio de [41]:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad (13)$$

Usando esta relación la representación de las matrices de espín de Pauli es [42]:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Estas matrices de Pauli satisfacen [43]:

$$\sigma_j^2 = I \ j = x, y, z$$

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 0 \ j \neq k$$

Las matrices de espín de Pauli también verifican la relación de conmutación:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_j \quad (15)$$

En donde ϵ_{jkl} es el símbolo de permutaciones [44].

Representaciones nónicas y cuárticas de una diada

En el espacio tridimensional es común utilizar dos productos entre vectores, el escalar, $\vec{A}.\vec{B}$, y el vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ [45]. Como su definición lo indica, el primero es un escalar, mientras que el segundo es un vector (más precisamente un seudovector) [46].

Se puede definir también un tercer producto entre vectores [47], pero este es tensorial. Esta operación consiste en colocar los vectores en cierto orden, por ejemplo o , mediados por un producto algebraico [48]. Este tensor se denomina diada y su representación matricial es [49]:

$$\vec{A}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{pmatrix}$$
$$\vec{A}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} (B_x \quad B_y \quad B_z) \quad (16)$$

La ecuación (16) se denomina la representación nónica de una diada debido a que tiene nueve elementos matriciales. Para el caso de espacio bidimensional la representación matricial es:

$$\vec{A}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} A_xB_x & A_xB_y \\ A_yB_x & A_yB_y \end{pmatrix}$$
$$\vec{A}\,\vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} (B_x \quad B_y) \quad (17)$$

En este caso la ecuación (17) es la representación cuártica de una díada con cuatro elementos matriciales.

De los vectores de Jones a las matrices de spin de Pauli

Dados los vectores de Jones [50]:

$$\vec{J}_i = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\left(A\hat{x} + Be^{i\alpha}\hat{y}\right) \quad (18)$$

$$\vec{J}_j = \frac{1}{\sqrt{C^2 + D^2}}\left(C\hat{x} + De^{i\beta}\hat{y}\right) \quad (19)$$

Con estos vectores de Jones se construyen las siguientes diadas:

$$D_{ij} = \vec{J}_i\vec{J}_j = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(A\hat{x} + Be^{i\alpha}\hat{y}\right)\frac{1}{\sqrt{C^2+D^2}}\left(C\hat{x} + De^{i\beta}\hat{y}\right) \quad (20)$$

$$D_{ji} = J_jJ_i = \frac{1}{\sqrt{C^2+D^2}}\left(C\hat{x} + De^{i\beta}\hat{y}\right)\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left(A\hat{x} + Be^{i\alpha}\hat{y}\right) \quad (21)$$

Expresando las ecuaciones (20) y (21) en forma matricial se obtiene [51]:

$$D_{ij} = E\begin{pmatrix} AC & ADe^{i\beta} \\ BCe^{i\alpha} & BDe^{i(\alpha+\beta)} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$D_{ji} = E\begin{pmatrix} AC & CBe^{i\alpha} \\ DAe^{i\beta} & BDe^{i(\alpha+\beta)} \end{pmatrix} \quad (23)$$

En donde E está definida como:

$$E = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\frac{1}{\sqrt{C^2+D^2}} \quad (24)$$

Ahora se construye el conmutador [52]:

$$\left[D_{ij}, D_{ji}\right] = D_{ij}\,D_{ji} - D_{ji}D_{ij} = E^2\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Los elementos matriciales del conmutador (25) son:

$$d_{11} = A^2D^2e^{2i\beta} - B^2C^2e^{2i\alpha}$$

$$d_{12} = -A^2CDe^{i\beta} + AB\left(C^2 + D^2e^{2i\beta}\right)e^{i\alpha} - CDB^2e^{(2\alpha+\beta)}$$

$$d_{21} = -A^2CDe^{i\beta} + AB\left(C^2 + D^2e^{2i\beta}\right)e^{i\alpha} - CDB^2e^{(2\alpha+\beta)}$$

$$d_{22} = B^2C^2e^{2i\alpha} - A^2D^2e^{2i\beta}$$

La matriz correspondiente al conmutador $[D_{ij}, D_{ji}]$ es simétrica y de traza nula [53]:

$$d_{ij} = d_{ji}\; Tr\left[D_{ij}, D_{ji}\right] = 0$$

Considerando una doble secuencia con vectores de Jones especificados por estados de polarización a la derecha y polarización lineal con ángulo de $\pi/4$ con respecto al eje $+x$, seguida por estados de polarización lineal con ángulo $\pi/4$ y una polarización circular a la izquierda, en el primer caso el conmutador de la primera secuencia es:

a) $$\left[D_I, D_J\right]_a = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}_a = (1+i)(\sigma_x + \sigma_z)cos^2\frac{\pi}{4}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (26)$$

Los elementos matriciales d_{ij} se han evaluado a partir de las ecuaciones (25). El conmutador de la ecuación (26) contiene las matrices de espín de Pauli σ_x y σ_y.

En el segundo caso el conmutador correspondiente a la siguiente secuencia es:

b) $$\left[D_I, D_J\right]_b = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}_b = (1+i)(\sigma_x - \sigma_z)cos^2\frac{\pi}{4} \quad (2 \quad (27)$$

Igualmente, los elementos matriciales de evalúan mediante la ecuación (25).

Las ecuaciones (26) y (27) se resuelven simultáneamente para obtener:

$$\sigma_x = e\left[D_{ij}, D_{ji}\right]_a + f\left[D_{ij}, D_{ji}\right]_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\sigma_z = g\left[D_{ij}, D_{ji}\right]_a + h\left[D_{ij}, D_{ji}\right]_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Se han generado las matrices de espín de Pauli σ_x y σ_y a partir de vectores de Jones, con estados de polarización circular y lineal en ángulo de $\pi/4$ con respecto al eje $+x$.

Las matrices de espín de Pauli forman una combinación lineal de los conmutadores correspondientes a estados de polarización circular y lineal en ángulo de σ_y. Los coeficientes de las transformaciones lineales están dados por:

$$e = \frac{1}{2(1+i)cos^2\frac{\pi}{4}}\ f = -\frac{1}{(1+i)cos^2\frac{\pi}{4}}$$

$$g = \frac{1}{2(1+i)cos^2\frac{\pi}{4}}\ h = -\frac{1}{2(1+i)cos^2\frac{\pi}{4}}$$

Para determinar σ_y se usa la relación de conmutación $[\sigma_z, \sigma_x]_s$ en la cual el subíndice denota la secuencia que producen las transformaciones lineales dadas por las ecuaciones (28) y (29).

$$[\sigma_z, \sigma_x]_s = 2i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

De donde se obtiene σ_y,

$$\sigma_y = \frac{1}{2i}[\sigma_z, \sigma_x]_s = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

El procedimiento elaborado en la doble secuencia con vectores de Jones muestra que si $[D_{ij}, D_{ji}]_a$ y $[D_{ij}, D_{ji}]_b$ corresponden a transformaciones lineales en el espacio 2-dimensional complejo, generado por vectores de Jones. Así, entonces, el conmutador de esas transformaciones también pertenece al mismo espacio. De esta manera, los conmutadores $[D_{ij}, D_{ji}]_a$ y $[D_{ij}, D_{ji}]_b$ generan la base del espacio vectorial dos dimensional complejo que son las matrices de espín de Pauli σ_x, σ_y, σ_z junto con la matriz unidad.

Conclusiones y discusión

Se han obtenido las matrices de espín de Pauli con secuencias de formas diádicas, construidas con vectores de Jones, las cuales combinan estados de polarización circular y lineal con ángulo π/4 respecto al eje *x*. Es posible generar las matrices de espín de Pauli usando otras secuencias que correspondan a vectores de Jones.

Los vectores de Jones son herramientas útiles para describir los estados de polarización de la luz, mientras las matrices de espín de Paulí están relacionadas con los estados de espín de los fermiones. La conexión es muy curiosa debido a que se están asociando entes abstractos relacionados a ondas electromagnéticas, como lo son los vectores de Jones, con otras entidades como lo son las matrices de espín de Paulí que se asocian a partículas elementales. La conexión encontrada no es tan trivial y, posiblemente, se enmarque en alguna forma de simetría que es necesario explorar.

El uso de relaciones de conmutación entre las formas tensoriales del espacio 2-dimensional complejo, generado por los vectores de Jones, es determinante para conformar la base del espacio en el que actúan las matrices de espín de Pauli. Es plausible también obtener conexiones más generales usando vectores de Jones más generales y extendiendo las formas tensoriales a espacios vectoriales con más dimensiones [54].

Referencias

[1] L. J. Vandergriff, "Nature and Properties of Light", en *Fundamentals of Photonics,* Chandrasekhar Roychoudhuri. University of Connecticut, Photonics Lab, 1999, pp. 1-38.

[2] V. V. Kotlyar, A. G. Nalimov y S. S. Stafeev, "Exploiting the circular polarization of light to obtain a spiral energy flow at the subwavelength focus", *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 36, n.° 10, pp. 2850-2855, 2019, doi: 10.1364/JOSAB.36.002850

[3] F. L. Pedrotti y L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, 2ª ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993.

[4] C. Schrijver y C. Zwaan Solar and Stellar magnetic activity (Cambridge University Press, New York, 2000).

[5] E. Bowel y B. Zellner in Proceedings of the International Astronomical Union edited by T. Gehrels (University of Arizona Press Tucson, 1974).

[6] J.H. Oort y T Walraven Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands 12, 285 (1956).

[7] R. Kulsrud y E. Zweibel, Reports on progress in physics 71, 046901 (2008).

[8] A. Raftopoulos, N. Kalyfommatou y C. P. Constantinou, "The properties and the nature of light: The study of newton's work and the teaching of optics", *Science and Education*, vol. 14, n.° 7, pp. 649-673, 2005. [En línea]. doi: 10.1007/s11191-004-5609-6

[9] H. G. Jerrard, "Modern description of polarized ligth: matrix methods", *Optics & Laser Technology*, vol. 14, n.° 6, pp. 309-319, 1982, 10.1016/0030-3992(82)90034-2

[10] J. Peatross y M. Ware, *Physics of Light and Optics*. Utah: Brigham Young University, 2008.

[11] N. C. Pistoni, "Simplified approach to the Jones calculus in retracing optical circuits", *Applied Optics*, vol. 34, n.° 34, pp. 7870-7876, 1995, doi: 10.1364/AO.34.007870

[12] D. A. Steck, *Classical and modern optics*. University of Oregon: Oregon Center for Optics and Departament of Physics, 2006.

[13] L. L. Frenzel, *Sistemas Electrónicos de comunicaciones,* 3ª ed. México, D. F: Alfaomega, 2003.

[14] P. Gorroochurn, "The end of statistical independence: the story of Bose-Einstein Statistics", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 40, n.° 3, pp. 12-17, 2018, doi: 10.1007/s00283-017-9772-4.

[15] J. Arnaud, J. M. Boé, L. y F. Philippe, "Illustration of the fermi-dirac statistics", *American Journal of Physics*, vol. 67, n.° 3, pp. 215-221, 1999, doi: 10.1119/1.19228

[16] G. A. D. Briggs, J. N. Butterfield y A. Zeilinger, "The Oxford questions on the foundations of quantum physics", *Proc R Soc A 469:20130299,* 2013, doi: 10.1098/rspa.2013.0299

[17] R. Muller y H. Wiesner, "Teaching quantum mechanics on an introductory level", *American Journal of Physics*, vol. 70, n.° 3, pp. 200-209, 2002, doi: 10.1119/1.1435346

[18] A. I. Borisenko y I. E. Tarapov, *Vector and tensor analysis with applications.* Worth Publishers, 1979.

[19] G. R. Hext, "The estimation of second-order tensors, with related tests and designs", *Biometrika*, vol. 50, n.° 3-4, pp. 353-373, 1963, doi: 10.1093/biomet/50.3-4.353

[20] J. O. Rodríguez, J. C. Rodríguez y A. C. Sevilla, "Un proceso de formalización matemática: Desde las rotaciones hasta las matrices de spin de Pauli", *Lat. Am. J. Phys. Educ*, vol. 2, n.° 3, pp. 323-330, 2008. [En línea]. Disponible en: http://www.lajpe.org/sep08/30_Orlando_Organista.pdf

[21] E. Witten, "Quantum field theory and the Jones polynomial", en *Braid Group, Knot Theory And Statistical Mechanics II*, pp. 361-451, 1994, doi: 10.1142/9789812798275_0013

[22] S. M. Reyes, D. A. Nolan, L. Shi y R. R. Alfano, "Special classes of optical vector vortex beams are Majorana-like photons", *Optics Communications*, vol. 464, n.° 1, pp. 1-5(125425), 2020, doi: 10.1016/j.optcom.2020.125425

[23] F. R. G. Díaz y R. G. Salcedo, "El fenómeno del espín semientero, cuaternios, y matrices de Pauli", *Rev. Matem.: Teor. y Ap.*, vol. 24, n.° 1, pp. 45-60, 2017, doi: 10.15517/RMTA.V24I1.27749

[24] P. M. Morse y H. Feshbach, "§1.6: Diadas y otros operadores vector" *Métodos de la Física Teórica,* vol. 1, Nueva York: McGraw-Hill, 1953.

[25] P. Mitiguy, "Vectors and dyadics", en *Introductory matrix algebra,* 2009, pp. 19-28.

[26] G. F. Torres del Castillo, "Rotaciones y espinores", *Rev. Mex. Fís.*, vol. 40, n.° 1, pp. 119-131. 1994. [En línea]. Disponible en: https://rmf.smf.mx/pdf/rmf/40/1/40_1_119.pdf

[27] D. S. Durfee y J. L. Archibald, "Applying classical geometry intuition to quantum spin", *Eur. J. Phys*, vol. 37, pp. 1-9, 2016, doi: 10.1088/0143-0807/37/5/055409

[28] L. Desmarais, *Applied electro-optics*, New Jersey: Prentice Hall, 1998.

[29] J. M. Marcela, "Polarización de la luz: conceptos básicos y aplicaciones en astrofísica", *Rev. Bras. Ensino Fís.*, vol. 40, n.° 4, pp. e4310, 2018, doi: 10.1590/1806-9126-rbef-2018-0024

[30] D. S. Kliger, J. W. Lewis y C. E. Randall, "Introduction to the Jones calculus, Mueller calculus, and Pincaré sphere", en *Polarized Light in Optics and Spectroscopy,* California: Academic Press, 1990.

[31] G. F. Torres del Castillo e I. R. García, "The Jones vector as a spinor and its representation on the Poincare sphere", *Rev. Mex. Fís.*, vol. 57, n.° 5, pp. 406-413, 2011. [En línea]. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/pdf/rmf/v57n5/v57n5a4.pdf

[32] E. V. Masalov, N. N. Krivin y S. Y. Eshchenko, "Analysis of the influence of a uniform hydrometeorological formation on the polarización characteristics of an electromagnetic wave", *Russian Physics Journal*, vol. 60, n.° 9, pp. 1469-1475, 2018, doi: 10.1007/s11182-018-1237-5

[33] T. Nishiyama, "General plane or spherical electromagnetic waves with electric and magnetic fields parallel to each other", *Wave Motion*, vol. 54, pp. 58-65, 2015, doi: 10.1016/j.wavemoti.2014.11.011.

[34] R. Hubrich y M. Eckhardt, "Motion vector estimation employing line and column vectors", U. S. Patent 7,852,937 B2, dic. 14, 2010. [En línea]. Disponible en: https://patentimages.storage.googleapis.com/5f/c2/24/f4203476b78bf1/US7852937.pdf

[35] R. C. Jones, "A new calculus for the treatment of optical systems. I. Description and Discussion of the Calculus", *Journal of the Optical Society of America*, vol. 31, n.° 7, pp. 488-493, 1941, doi: 10.1364/JOSA.31.000488

[36] R. C. Jones, "A New calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke theory of optical activity", *Journal of the Optical Society of America*, vol. 31, n.° 7, pp. 500-503, 1941, doi: 10.1364/JOSA.31.000500

[37] E. Bretislav y D. Herschbach, "Stern and Gerlach: how a bad cigar heped reorient atomic physics", *Phy. Tod.*, vol. 56, n.° 12, pp. 53-59, 2003, doi: 10.1063/1.1650229

[38] M. Danos, "Fully consistent phase conventions in angular momentum theory", *Nucl., Part. Many Body*

Phy., pp. 319-334, 1972, doi: 10.1016/B978-0-12-508201-3.50020-X

[39] Y. Mohammed y A. Emadaldeen, "Separation of angular momentum", *Am. J. App. Mat.s*, vol. 4, n.° 1, pp. 47-52, 2016, doi: 10.11648/j.ajam.20160401.14

[40] A. Bertapelle y A. Candilera, "Eigenvectors and eigenvalues: a new formula?", *Boll Un. Mat. Ital* vol. 13, pp. 329-333, 2020, doi: 10.1007/s40574-020-00222-z

[41] D. J. Griffiths, *Intr. Quantum Mechs.* Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1995.

[42] I. M. Greca y O. Freire, "Teaching introductory quantum physics and chemistry: caveats from the history of science and science teaching to the training of modern chemists", *Chem. Educ. Res. Pract*, vol. 15, pp. 286-296, 2014, doi: 10.1039/C4RP00006D

[43] J. Kronsbein, "Kinematics-Quaternions-Spinors-and Pauli´s Spin Matrices", *Am. J. Ph.*, vol. 35, pp. 335-342, 1967, doi: 10.1119/1.1974074

[44] D. A. Konkowski, T. M. Helliwell y C. Wieland, "Quantum singularity of Levi-Civita spacetimes", *Class. Quantum Grav.*, vol. 21, n.° 1, pp. 265-272, 2004, doi: 10.1088/0264-9381/21/1/018

[45] G. B. Arfken y H. J. Weber, *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, 6ª ed. Río de Janeiro: El Sevier, 2007.

[46] H. U. Haq, "Geometry of spin: clifford algebraic approach", *Resonance.*, vol. 21, pp. 1105-1117, 2016, doi: 10.1007/s12045-016-0422-5

[47] L. Boi, "Clifford geometric algebras, spin manifolds, and group actions in mathematics and physics", *Adv. Appl. Clifford alg.*, vol. 19, pp. 611-656, 2009, doi: 10.1007/s00006-009-0199-7

[48] H. Goldstein, C. P. Poole y J. L. Safko, Classical mechanics, 6ª ed. Addison-Wesley, 2001.

[49] D. L. Schwartz, "The emergence of abstract representations in dyad problem solving", *J. the Lear. Sc.*, vol.4, n.° 3, pp. 321-354, 1995, doi: 10.1207/s15327809jls0403_3

[50] R. C. Jones, "A new calculus for the treatment of optical systems v. a more general formulation, and description of another calculus", *J. Op. Soc. Am.*, vol.. 37, n.° 2, pp. 107-110, 1947, doi: 10.1364/JOSA.37.000107

[51] P. Yeh, "Extended Jones matrix method", *J. Soc. Am.*, vol.. 72, n.° 4, pp. 507-513, 1982, doi: 10.1364/JOSA.72.000507

[52] A. V. Volyar, T. A. Fadeeva y V. G Shvedov, "Optical vortex generation and jones vector formalims", *Op. Spec.*,-vol. 93, n.° 2, pp. 267-272, 2002, doi: 10.1134/1.1503758

[53] A. Lien, "A detailed derivation of extended Jones matrix representation for twisted nematic liquid crystal displays", *Liq. Crys.*, vol. 22, n.° 2, pp. 171-175, 1997, doi: 10.1080/026782997209531.

[54] S. R. Cloude, "Group theory and polarisation algebra", *Optik*, vol. 75, n.° 1, pp. 26-36, 1986. [En línea]. Disponible en: http://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=8138457