Revista Facultad de Ciencias Básicas 2021 Vol. 17(1)
enero - junio ▪ ISSN: 1900-4699 · e-ISSN: 2500-5316 ▪ pp. 47-56

Editorial Neogranadina

DOI: https://doi.org/10.18359/rfcb.4992

Analogía magnetostática del estado de energía cero de Jackiw-Rebbi*

Robert Augusto Rubiano Giraldo[a]

Resumen: se establece una analogía teórica entre la ecuación de Poisson y la ecuación de Dirac; específicamente, al estudiar el comportamiento del campo magnetostático, debido a la susceptibilidad en medios no homogéneos, no isotrópicos, unidimensionales, con alta permeabilidad magnética. Como resultado, se obtuvo una relación con el modelo de Jackiw-Rebbi para el estado de energía cero.

Palabras clave: analogía; mecánica cuántica; modelo Jackiw-Rebbi; teoría magnetostática; transformación

Recibido: 07 de octubre de 2020

Aceptado: 16 de abril de 2021

Disponible en línea: 19 de noviembre de 2021

Cómo citar: R. A. Rubiano Giraldo, «Analogía magnetostática del estado de energía cero de Jackiw-Rebbi», Rev. Fac. Cienc. Básicas, vol. 17, n.º 1, pp. 47-56, nov. 2021.

* Artículo de investigación.

a Físico. Programa de Posgrado en Física, João Pessoa, Brasil.
Correo electrónico: robert.rubiano@academico.ufpb.br ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3534-7832

Magnetostatic Analogy of the Jackiw-Rebbi Zero Energy State

Abstract: a theoretical analogy is established between Poisson's equation and Dirac's equation; specifically, when studying the behavior of the magnetostatic field, due to the susceptibility in non-homogeneous, non-isotropic, one-dimensional media with high magnetic permeability. As a result, a connection with the Jackiw-Rebbi model for the zero energy state was found.

Keywords: analogy; quantum mechanics; Jackiw-Rebbi model; magnetostatic theory; transformation

Analogia magnetostática do estado de energia zero de Jackiw-Rebbi

Resumo: é estabelecida uma analogia teórica entre a equação de Poisson e a equação Dirac; especificamente, ao estudar o comportamento do campo magnetostático, devido à suscetibilidade em meios não homogêneos, não isotrópicos, unidimensionais, com alta permeabilidade magnética. Como resultado, foi obtida uma relação com o modelo de Jackiw-Rebbi para o estado de energia zero.

Palavras-chave: analogia; mecânica quântica; modelo Jackiw-Rebbi; teoria magnetostática; transformação

Introducción

El número de investigadores que indagan la manera de lograr nuevas formas de transición entre la mecánica clásica y la cuántica ha ido en aumento. Principalmente, se encuentran analogías matemáticas en los trabajos de González [1]; Rubiano *et al.* [2]; Rokaj *et al.* [3] y González *et al.* [4], entre la teoría electrostática y la mecánica cuántica, ya que se desarrollan en casos particulares, bajo ciertas condiciones dentro del marco clásico, adquiriendo una similitud o relación con diferentes fenómenos cuánticos. En específico, proporcionan una forma de explorar a nivel macroscópico muchos fenómenos cuánticos, inaccesibles actualmente en sistemas cuánticos macroscópicos.

Ahora bien, es necesario aclarar que, hasta el momento, este tipo de analogías se mantiene en un marco ideal, debido a que no se han desarrollado pruebas experimentales con argumentos suficientes para sustentar estas ideas. Cuando se alude a una analogía matemática, se afirma que los fenómenos poseen una estructura algebraica análoga de manera natural. Sin embargo, en ciertos aspectos, las respuestas encontradas difieren de los marcos de referencia confrontados (clásico y cuántico), debido a que su naturaleza física con frecuencia es "característica" de la teoría empleada.

Ejemplo de ello es la física que envuelve al espín de las partículas. Hasta el momento, se sabe que no tiene análogo clásico, posiblemente porque su interpretación es únicamente cuántica. En este punto el uso de transformaciones que conduzcan a una relación entre ambas teorías es una propuesta muy atractiva, siempre que las transformaciones se realicen dentro de un marco específico, establecido por las condiciones de Rokaj *et al.* [3] y González *et al.* [4], que deben satisfacerse en las ecuaciones vectoriales de Poisson y Dirac, por ejemplo, las condiciones de contorno.

El aumento en el número de estudios que abordan el problema de simulación de la mecánica cuántica relativista se vale de diferentes plataformas físicas, tales como estructuras ópticas [5], metamateriales [6] y trampas iónicas [7]. En el estudio de las analogías cuánticas-clásicas investigadas, parece que las más fructífera están dadas por la analogía entre la óptica y los fenómenos cuánticos, debido a la dualidad entre la materia y la óptica. Las analogías ópticas cuánticas se basan en la similitud formal entre la ecuación de onda paraxial en medios dieléctricos y la ecuación de Schrödinger para una única partícula [8].

Entre la amplia variedad de analogías ópticas cuánticas, podemos mencionar las oscilaciones de Bloch, la tunelización Zener, la dinámica de localización, la localización de Anderson, el efecto cuántico de Zeno, la caída de Rabi y la captura coherente de la población. En consecuencia, este progreso ha llevado a investigar cómo los sistemas relativistas pueden ser imitados por ondas ópticas y ondas de referencia a potencial.

La ecuación de Dirac, una de las ecuaciones fundamentales en la física teórica, explica completamente la mecánica cuántica para partículas elementales de espín ½ [9], en el contexto de la Teoría Especial de la Relatividad; además desempeña un papel clave en la explicación de muchos fenómenos físicos exóticos, como las propiedades del grafeno [10], aislantes topológicos [11] y superconductores [12].

Paul Dirac formuló esta ecuación con los objetivos de (1) describir el comportamiento de las partículas fermiónicas como el electrón; (2) analizar los valores negativos de la energía y (3) excluir los valores negativos de la probabilidad, dado que los valores negativos generados en la ecuación de Klein-Gordon [13] eran una falla notable en la teoría. Sin embargo, para sorpresa de la comunidad científica, Dirac terminó por resolver el problema de la probabilidad, pero en cuanto a la energía negativa, indicó la posible existencia de una nueva partícula asociada a ella [14], identificada en principio como *positrón* [15].

Posteriormente, ese descubrimiento recibió el nombre de *antipartícula* del electrón; mientras la electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés) de Feynman terminó por describir su interpretación [16]. Más recientemente, los sistemas ópticos gobernados por la ecuación de Dirac han sido investigados experimentalmente como la tunelación de Klein [17], Zitterbewegung [18] y el modelo Jackiw-Rebbi [19].

Finalmente, debe aclararse que el propósito de esta contribución es argumentar cómo la magnetostática puede proporcionar una herramienta de laboratorio donde se exploran los fenómenos físicos descritos por la ecuación de Dirac. En particular, se enseña de qué modo la ecuación de Poisson (en medios unidimensionales no-homogéneos magnéticos) está relacionada con el estado propio de energía cero de la ecuación (unidimensional estacionaria) de Dirac, con un potencial escalar de Lorentz.

Al adoptar la permeabilidad magnética, se propone un experimento magnetostático que simula un modelo relativista, importante en términos históricos, conocido como *modelo de Jackiw-Rebbi* [19]. Desde su derivación, modelos posteriores a este son: el modelo de Ramajara-Bell [20], el modelo masivo de Jackiw-Rebbi [21], el modelo acoplado fermión-kink [22] y el modelo Jackiw-Rebbi en distintos fondos kinklik [23].

El artículo está distribuido de la siguiente manera: primero presentamos una revisión del modelo de Jackiw-Rebbi y la ecuación unidimensional de Dirac. En segundo lugar, se introduce una transformación para el potencial magnético, en el caso de un medio magnetizable, lineal, no homogéneo, no isotrópico, en la ecuación unidimensional de Poisson, lo que conduce a una ecuación tipo Dirac estacionaria. En tercer lugar, se obtiene una solución a la ecuación tipo Dirac encontrada, para problemas específicos. Por último, las secciones finales contienen el análisis y las conclusiones de los resultados.

Modelo Jackiw-Rebbi

El modelo Jackiw-Rebbi (energía de punto cero) [19], que describe un campo de Dirac (unidimensional) acoplado a un campo de solitón de fondo estático, es una de las primeras descripciones teóricas de un aislante topológico, cuyo modo de energía cero puede entenderse como el estado de borde o límite en determinada región, sin considerar su frontera. En particular, este modelo ha sido estudiado por Su, Shrieffer y Heeger en el límite continuo de poliacetileno [24]. La ecuación estacionaria unidimensional de Dirac, en presencia de un campo externo $\varphi(x)$ con unidades $\hbar = c = 1$, está dada por la siguiente expresión:

$$\hat{H}_D\Psi(\mathrm{x}) = [\sigma_y\hat{p} + \sigma_x\varphi(x)]\Psi(\mathrm{x}) = \mathcal{E}\Psi(\mathrm{x}) \tag{1}$$

Donde:

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Psi(\mathrm{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Empleando las matrices de Pauli [25] σ_y y σ_x para obtener un espinor real de dos componentes $\Psi(x)$. Este hamiltoniano de Dirac (1) posee, además, una simetría quiral definida por el operador σ_z (matriz de Pauli), que anticonmuta con el hamiltoniado de Dirac $\{\hat{H}_D, \sigma_z\} = 0$.

La simetría quiral implica que los estados propios vienen en pares con energía positiva y negativa $\pm\mathcal{E}$, respectivamente. Sin embargo, es posible que un estado propio sea su propio socio para $\mathcal{E} = 0$; es decir, que este adquiera valores positivos (estados dispersos) y negativos (estados ligados), para ser su propio par (invariante topológico). Si este es el caso, entonces el estado está protegido topológicamente. El estado propio de energía cero que se propaga en el límite del material ("placa conductora") está protegido por la topología del campo de potencial escalar, determinado así por la simetría del sistema planteado [26]-[28].

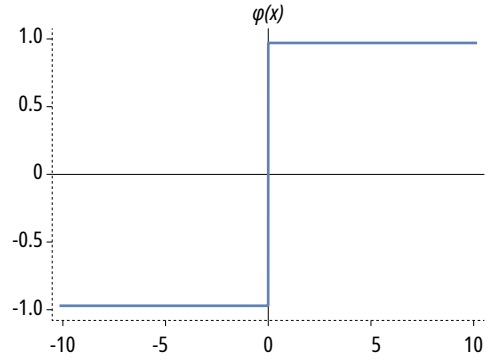

Figura 1. Potencial escalar externo $\varphi(x)$ que cambia el signo.

Fuente: elaboración propia.

La figura 1 muestra el potencial escalar externo $\varphi(x)$ que cambia el signo en la interfaz $x = 0$, cuya

existencia está garantizada por el teorema de índice, que se localiza alrededor del solitón (onda no lineal que se propaga sin deformarse) [19]. El modelo Jackiw-Rebbi usa $\varphi(x) = m \times tanh(\lambda x)$ para el campo de potencial escalar, con $m > 0$ y $\lambda > 0$. Por simplicidad, se considera un campo de potencial escalar uniforme de la forma:

$$\varphi(x) = m\frac{x}{|x|} \tag{3}$$

Formando una pared de dominio $x = 0$ en donde $\varphi(x = 0) = 0$. El campo escalar dado por la ecuación 3 es una simplificación del modelo Jackiw-Rebbi, propuesto por primera vez por Rajaraman-Bell [20]. La forma precisa del potencial escalar externo no es importante, siempre que se aproxime asintóticamente con un signo opuesto en $x \to \pm\infty$.

La función propia puede cambiar en función de una forma particular de potencial escalar externo, pero la existencia del estado de energía cero está determinada, únicamente, por el hecho de que la masa es positiva en un sector y negativa en el otro, esto quiere decir que la masa del fermión hace que el potencial sea asimétrico, de manera que sus valores asintóticos en dos infinitos espaciales sean diferentes [29]. Por tanto, la solución para el potencial escalar externo es muy amplia.

La solución de la ecuación de Dirac (ecuación 1), con una energía exactamente cero para el campo escalar (ecuación 3), se obtiene resolviendo la ecuación 4.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_x + \varphi(x) \\ \partial_x + \varphi(x) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

A partir de lo cual se encuentra que

$$\psi_i(x) = C_{1,2}\exp\{m|x|\}_{1,2} \quad i = 1,2 \tag{5}$$

Donde $C_{1,2}$ es la constante de normalización.

Si se normaliza la función (ecuación 5), es evidente que C_2 debe tender a cero para evitar problemas de divergencia. La figura 2 muestra la función de onda para el estado de energía cero del modelo Jackiw-Rebbi.

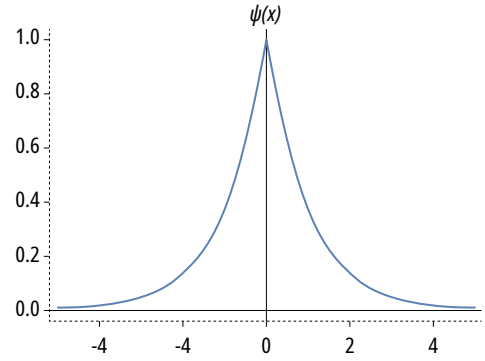

Figura 2. Modo de energía cero Jackiw-Rebbi, para el campo escalar externo representado en la figura 1. El estado se localiza alrededor de $x = 0$.

Fuente: elaboración propia.

Analogía magnetostática del modelo de Jackiw-Rebbi

Como una extensión al estudio de las analogías encontradas por González [1]; Rubiano *et al.* [2] y Rokaj *et al.* [3], se establece una relación entre (1) la ecuación unidimensional de Poisson, en medios magnetizables no homogéneos, no isotrópicos; y (2) la ecuación (unidimensional) de Dirac, para la energía de punto cero.

Esta relación también puede obtenerse para el caso electrostático [4]. Sin embargo, es evidente observar que, en Gonzalez *et al.* [4], el resultado presenta una desviación que no favorece los resultados teóricos, debido a que las constantes de permitividad eléctrica de los materiales varían, debido a la no homogeneidad entre los medios. Variar la permitividad eléctrica no es una opción viable, ya que esto presenta un efecto mínimo sobre el campo electrostático y, por tanto, sobre la solución [2]. De modo que, en este artículo se aborda el caso magnetostático, para evitar la desviación presente cuando se analiza este tipo de medios. En particular, se consideran medios con alta permeabilidad magnética, ya que tienen gran susceptibilidad al campo magnetostático.

Tomando en cuenta que, ahora, la permeabilidad magnética es una función que depende de la

posición, en el caso unidimensional, la ecuación de Poisson debe expresarse de la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)}\frac{dA_z}{dx}\right) = -J_z(x) \tag{6}$$

$$\frac{d^2A_z}{dx^2} - \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\frac{dA_z}{dx} = -\mu(x)J_z(x) \tag{7}$$

Ahora, aplicamos en la ecuación 7 la transformación de la ecuación 8, la cual establece una distribución de campos magnetostáticos (figura 3) distintos a los propuestos por Rokaj *et al.* [3], de la siguiente manera:

$$A_z(x) = A_0 \ln\left(\frac{\psi_1(x)}{\mathrm{V}}\right) \tag{8}$$

Donde A_0 (potencial magnetostático constante) y V son constantes que aseguran la dimensionalidad; mientras ψ_1 (x) es una función arbitraria.

Ahora bien:

$$\frac{dA_z}{dx} = A_0\frac{\psi_1{}'(x)}{\psi_1(x)}$$

$$\frac{d^2A_z}{dx^2} = A_0\frac{\psi_1'{}'(x)}{\psi_1(x)} - A_0\left(\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}\right)^2 \tag{9}$$

Además, se asume un campo magnetostático que se comporta de la siguiente forma (figura 3):

$$B_y(x) \approx -\frac{dA_z}{dx} = -A_0\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}$$

$$B^2 = B\cdot B = {A_0}^2\left(\frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}\right)^2 \tag{10}$$

Entre las placas existe un material lineal, no homogéneo, no isotrópico, magnetizable:

$$A_0\frac{\psi_1{}''(x)}{\psi_1(x)} - \frac{B^2}{A_0} + \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}B_y = -\mu(x)J_z(x) \tag{11}$$

Relacionando la ecuación 10 con la 7, e introduciendo el término resultante en la ecuación 11, se obtiene lo siguiente:

$$A_0\frac{\psi_1{}''(x)}{\psi_1(x)} - \frac{B^2}{A_0} + \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}B_y = -\mu(x)\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}B_y - \frac{1}{\mu(x)}\frac{dB_y}{dx}\right) \tag{12}$$

$$A_0\frac{\psi_1{}''(x)}{\psi_1(x)} + \frac{dB_y}{dx} - \frac{B^2}{A_0} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{A_0}\frac{dB_y}{dx}\psi_1(x) - \frac{B^2}{{A_0}^2}\psi_1(x) = 0 \tag{14}$$

Una breve salvedad es que la ecuación 14 no depende de la permeabilidad magnética. Sumando y restando $B_y\frac{\psi_1{}'(x)}{A_0}$ en esta se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{A_0}\frac{dB_y}{dx}\psi_1(x) - \frac{B^2}{{A_0}^2}\psi_1(x) + B_y\frac{\psi_1'(x)}{A_0} - B_y\frac{\psi_1'(x)}{A_0} = 0 \tag{15}$$

En el límite, donde € representa la energía de punto cero:

$$\lim_{€\to 0}\left\{\frac{d}{dx}\left[\psi_1'(x) + B_y\frac{\psi_1(x)}{A_0}\right] - \frac{B^2}{{A_0}^2}\psi_1(x) - B_y\frac{\psi_1'(x)}{A_0} + €^2\psi_1(x)\right\} = 0 \tag{16}$$

Donde € es una constante auxiliar que debe determinarse. Si se realiza la sustitución $\psi_1'(x) + B_y\frac{\psi_1(x)}{A_0} = €\psi_2(x)$ en la ecuación 16 se encuentra:

$$€\psi_2'(x) - \frac{B^2}{{A_0}^2}\psi_1(x) - B_y\frac{\psi_1'(x)}{A_0} + €^2\psi_1(x) = 0 \tag{17}$$

$$\psi_2'(x) + \frac{B_y}{A_0}\psi_2(x) = €\psi_1(x) \tag{18}$$

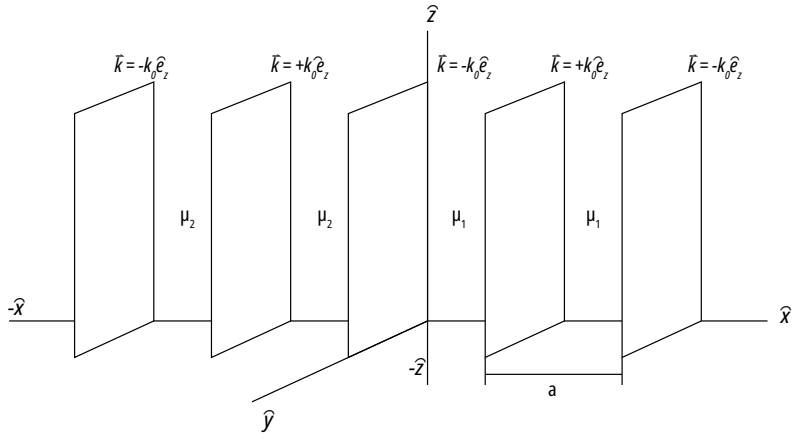

Figura 3. Configuración magnetostática con una corriente superficial $\vec{\mathrm{K}} = \mp k\hat{z}$ [30], [31].

Fuente: elaboración propia.

La 17 y la 18 son dos ecuaciones diferenciales acopladas que pueden reescribirse de forma semejante (matemáticamente) a la ecuación estacionaria unidimensional de Dirac (ecuación 1), con unidades $\hbar = c = 1$, tal que

$$\hat{H}_D\Psi(x) = \left[\sigma_y\hat{p} + \sigma_x\left(\frac{B_y(x)}{A_0}\right)\right]\Psi(x) = €\Psi(x) \tag{19}$$

De este modo, se propone una solución a la ecuación 19, la cual se encuentra relacionada con la solución en la ecuación 5, debido a la existencia de un campo magnetostático $B_y(x)$ que produce un comportamiento homólogo al establecido por la función de Jackiw-Rebbi, en dicha solución (ver la primera sección). Es decir, se muestra que el estado de energía cero Jackiw-Rebbi puede generarse en la interfaz de dos materiales magnéticos separados por una placa infinita, con una densidad de corriente superficial. Análogo a este caso, encontramos que el uso de placas infinitas cargadas para emular sistemas físicos se ha utilizado ampliamente para una variedad de aplicaciones, como un simple capacitor de placas paralelas [32] o en el estudio unidimensional del gas de Coulomb [33].

Es posible simplificar la ecuación 19 en dos ecuaciones de tipo Schrödinger desacopladas $\hat{H}_i\Psi_i = 0$, para $i = 1, 2$.

$$\hat{H}_i\psi_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_i(x)\right)\psi_i(x) = \tag{20}$$

Donde:

$$U_{1,2}(x) = \left[-\left(\frac{B_y(x)}{A_0}\right)^2 + €^2 \pm \frac{1}{A_0}\frac{dB_y}{dx}\right] \tag{21}$$

Se observa que $\hat{H}_{1,2}$ son hamiltonianos supersimétricos que pueden ser factorizados como $\hat{H}_1 = \hat{A}^\dagger\hat{A} - €^2$ y $\hat{H}_2 = \hat{A}\hat{A}^\dagger - €^2$, donde $\hat{A} = \left(\partial_x + \frac{B_y(x)}{A_0}\right)$ y $\hat{A}^\dagger = \left(-\partial_x + \frac{B_y(x)}{A_0}\right)$ son análogos a los operadores escalera.

De igual forma se construye el valor propio del modo de energía cero estableciendo € = 0 en la ecuación 19; y resolviendo las ecuaciones diferenciales de primer orden no acopladas para $\psi_{1,2}(x)$ (espinor constante de dos componentes), se obtiene:

$$\psi_{1,2}(x) = \mathrm{V}_{1,2}\exp\left\{\int\left(\frac{B_y(x)}{A_0}\right)dx\right\}_{1,2} \tag{22}$$

Asumiendo una configuración magnetostática descrita en la figura 3, se obtiene el siguiente resultado:

$$B_y(x) = \begin{cases} -\frac{\mu_2 k}{2}\hat{y}, \ para \quad x < 0 \\ \frac{\mu_1 k}{2}\hat{y}, \ para \quad x > 0 \end{cases} \tag{23}$$

El campo magnetostático dado por la ecuación 23 es sencillo de obtener y puede encontrarse en Sadiku [30], teniendo como base la configuración de la figura 3. Este campo tiene, curiosamente, la misma forma del campo escalar externo dado por la ecuación 3, el cual permite la existencia del estado propio de energía cero en el modelo Jackiw-Rebbi. El potencial vectorial magnetostático dado por el campo (ecuación 23) se determina al resolver la ecuación 10, de la siguiente forma:

$$A_z = -\int_0^x B_y(x)\,dx = \begin{cases} \frac{\mu_2 k}{2}x, \ para \quad x < 0 \\ -\frac{\mu_1 k}{2}x, \ para \quad x > 0 \end{cases} \tag{24}$$

Normalizando la función descrita por la ecuación 22, e introduciendo la ecuación 24 en ella, se obtiene el siguiente resultado:

$$|\psi_i(x)| = |\mathrm{V}_{1,2}|^2\int_0^\infty e^{\left(\frac{2\mu_{1,2}k}{2A_0}x\right)}dx = 1 \tag{25}$$

$$|\mathrm{V}_{1,2}|^2\frac{A_0}{\mu_{1,2}k}\left\{e^{\left(\frac{\mu_{1,2}k}{A_0}\infty\right)} - e^0\right\} = 1 \tag{26}$$

Para que la función anterior sea normalizable se debe cumplir que $\mathrm{V}_2 = 0$, por lo que resulta que el valor de V_1 es el siguiente:

$$|\mathrm{V}_1| = \sqrt{\frac{(\mu_1+\mu_2)k}{A_0}} \tag{27}$$

Reemplazando la constante de normalización la ecuación 27 en la 22, y agregando el potencial magnetostático (ecuación 24), se obtiene una función propia para el modo cero de la ecuación de Dirac (ecuación 19), dada por la siguiente expresión:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{(\mu_1+\mu_2)k}{A_0}}\begin{pmatrix} e^{\frac{A_z}{A_0}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Resultados y discusión

A fin de comprobar si la ecuación 28 modela una función propia en el estado propio de energía cero del modelo Jackiw-Rebbi; inicialmente, se simuló la ecuación 28, para diferentes valores de permeabilidad magnética, empezando por valores cercanos a los característicos en materiales

superparamagnéticos y, posteriormente, del orden de los ferromagnéticos. Al simular la ecuación 28, se tomaron algunos parámetros constantes $A_0 = 3$, $k = 1$ (figura 4). En la figura 5, se tomaron como parámetros contantes $A_0 = 2000$ y $k = 1$, donde el potencial magnetostático debe ser $A_0 \geq 3$ y $A_0 \geq 2000$, para que los valores adquiridos por la función propia (28) concuerden con la normalización.

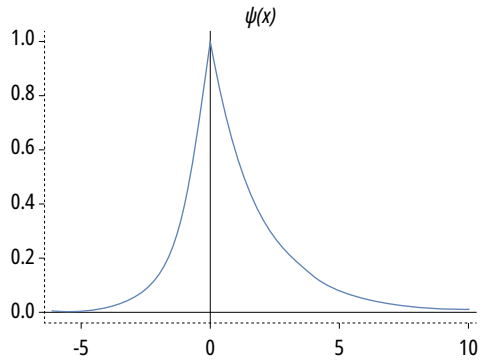

Figura 4. La función propia (ecuación 28) para un medio no homogéneo unidimensional con constantes $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 2$ [34].

Fuente: elaboración propia.

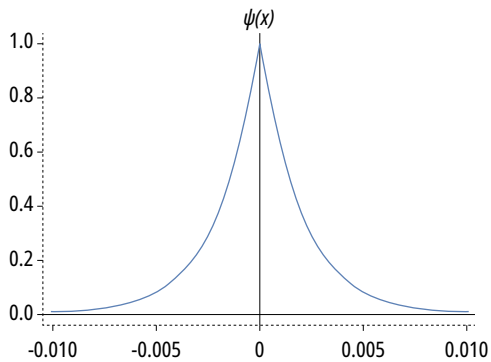

Figura 5. La función propia (28) para un medio no-homogéneo unidimensional con constantes $\mu_1 = 983$ y $\mu_2 = 1043$ [35].

Fuente: elaboración propia.

Efectivamente, tanto en la figura 4 como en la figura 5, se observa que la función propia 28 se localiza alrededor del cero en el eje equis. Del mismo modo, que la función propia del estado propio de energía cero del modelo de Jackiw-Rebbi (figura 2). Ahora, indiscutiblemente, la figura 5 presenta mayor semejanza con la figura 2; no obstante, tiene intensidades mayores, debido a que el campo magnetostático es "reforzado" por la fuerte magnetización del medio empleado entre las placas.

Caso contrario al anterior es la figura 4, donde el material empleado no presenta alta magnetización, debido a esto, se obtuvieron curvas de comportamiento tan características en cada medio empleado. Es notable observar que cuanto más se acerquen las constantes de permeabilidad magnética relativa, es decir , mayor es la semejanza con el modelo de Jackiw-Rebbi en la figura 2.

Conclusiones

El presente estudio extensivo se desarrolló mediante un proceso analítico, de modo que la solución se encontró con precisión; simulando finalmente la solución propia (ecuación 28) para complementar el análisis (figuras 4-5), donde además se tomó en cuenta la constante de permeabilidad magnética de los medios empleados.

Ello contrasta con la investigación propuesta por González *et al.* [4] para una configuración de campos electrostáticos en la materia, que no considera una configuración de campos magnetostáticos (en la materia). Esto establece, en este estudio, la posibilidad de proponer una versión más precisa (matemáticamente) para un símil cuántico entre las ecuaciones 5 y 28, ya que la versión de González *et al.* no es totalmente precisa, debido a que la constante de permitividad eléctrica presenta un rango limitado, lo que ocasiona una desviación que no favorece los resultados teóricos.

En el presente estudio se demostró que, a valores elevados de permeabilidad magnética ($100 \ll \mu_r$), la función propia 28 permite simular un sistema cuántico como el modelo Jackiw-Rebbi con gran precisión (figura 5). Sin embargo, cuando se emplean valores cercanos a uno ($\mu_r \ll 10$) para la permeabilidad magnética (figura 4), se obtiene el mismo modelo que se presenta en González *et al.* [4]. Por otra parte, conviene subrayar que el potencial magnetostático debe ser en magnitud proporcional a la suma de las constantes de permeabilidad magnética de los medios que se empleen.

Por último, se concluye que el estudio realizado con base en las investigaciones de González [1];

Rubiano *et al.* [2]; Rokaj *et al.* [3], para explorar una relación entre la ecuación (unidimensional) vectorial de Poisson, en medios magnéticos no-homogéneos, no-isotrópicos, y la ecuación (unidimensional) de Dirac para el estado de energía cero, ha demostrado su efectividad, estableciendo un rango de permeabilidades magnéticas para las cuales es posible un símil, con gran precisión, entre la teoría magnetostática y la mecánica cuántica, modelando el sistema de Jackiw-Rebbi.

Agradecimientos

A la Universidad Surcolombiana, a través de la vicerrectoría de Investigación y Proyección Social, por el apoyo económico dado para la elaboración de este artículo, a través del Proyecto de Investigación 2334.

Referencias

[1] G. González, "Relation between Poisson and Schrödinger equations", *American Journal of Physics,* vol. 80, n.° 8, pp. 715-719, 2012.

[2] R. A. Rubiano, J. Tapia y H. González, "Dual solutions Schrödinger type for Poisson equation", *Journal de Ciencia e Ingeniería,* vol. 12, n.° 1, pp. 151-165, 2020.

[3] V. Rokaj, F. Diakonos y G. Gabriel, "Comment on and erratum. Relation between Poisson and Schrödinger equations", *American Journal of Physics,* vol. 82, n.° 8, pp. 802-803, 2014.

[4] G. González, J. Méndez, R. Díaz y F. J. Gonzalez, "Electrostatic simulation of the Jackiw-Rebbi zero energy state", *Revista Mexicana de Física E,* vol. 65, n.° 1, pp. 30-33, 2019.

[5] M. A. Miri, M. Heinrich, R. El-Ganainy y D. N. Christodoulides, "Supersymmetric optical structures", *Physical Review Letters,* vol. 110, n.° 23, pp. 23-902, 2013. Doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.233902

[6] M. Mohammad-Ali, H. Matthias, E. G. Ramy y C. Demetrios N., "Photonic simulation of topological excitations in metamaterials", *Scientific Reports,* vol. 4, n.° 3842, pp. 1-7, 2014.

[7] L. Lamata, J. León y E. Solano, "dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion", *Physical Review Letters,* vol. 98, n.° 25, p. 253005, 2007.

[8] S. Longhi, "Classical simulation of relativistic quantum mechanics in periodic optical structures", *Applied Physics B,* vol. 104, n.° 3, pp. 453-468, 2011.

[9] P. A. M. Dirac, "The quantum theory of the electron", *The Royal Society,* vol. 117, n.° 778, pp. 610-624, 1928.

[10] K. Novoselov *et al.*, "Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene", *Nature,* vol. 438, n.° 7065, pp. 197-200, 2005.

[11] M. Hasan y C. Kane, "Colloquim: Topological insulators", *Reviews of Midern Physics,* vol. 438, n.° 7065, pp. 197-200, 2005.

[12] X. Qi y S. Zhang, "Topological insulators and superconductors", *Reviews of Modern Physics,* vol. 83, n.° 4, pp. 1057-1110, 2011.

[13] I. Aitchison y A. Hey, "In gauge theories in particle physics. A practical introduction", en *Relativistic Quantum Mechanics*. Nueva York, CRC Press, 2012, pp. 63-83.

[14] P. A. M. Dirac, "A theory of electrons and protons", *The Royal Society,* vol. 126, n.° 801, pp. 360-365, 1930.

[15] C. D. Anderson, "The positive electron", *Physical Review Journals Archive,* vol. 43, n.° 1, pp. 491-494, 1933.

[16] R. P. Feynman, "The theory of positrons", *Physical Review Journals Archive,* vol. 76, n.° 1, pp. 749-759, 1949.

[17] N. Stander, N. Huard y D. Goldhaber, "Evidence for Klein tunneling in graphene", *Physical Review Letters,* vol. 102, n.° 026807, pp. 1-4, 2009.

[18] M. Katsnelson, "Zitterbewgung chirality, and minimal conductivity in graphene", *The European Physical Journal B,* vol. 51, n.° 2, pp. 157-160, 2006.

[19] R. Jackiw y C. Rebbi, "Solitons with fermion number 1/2", *Physical Review D,* vol. 13, n.° 12, pp. 3398-3409, 1976.

[20] R. Rajaraman y J. Bell, "On solitons with half integral charge", *Physics Letters B,* vol. 883, n.° 3213, pp. 256-266, 1982.

[21] F. Charmchi y S. Gousheh, "Massive Jackiw-Rebbi model", *Nuclear Physics B,* vol. 883, n.° 3213, pp. 151-154, 1982.

[22] A. Amado y A. Mohammadi, "Coupled fermion-kink system in Jackiw-Rebbi", *The European Physical Journal C,* vol. 77, n.° 7, pp. 465-475, 2017.

[23] D. Bazeia y A. Mohammadi, "Fermionic bound states in distinct kinklike", *The European Physical Journal C,* vol. 77, n.° 1434, pp. 203-211, 2017.

[24] W. Su, J. Schrieffer y A. Heeger, "Soliton exitations in polyacetylene", *Physical Review B,* vol. 22, n.° 4, pp. 2099-2111, 1983.

[25] D. Mcmahon, *Quantum mechanics demystified*, New York: McGraw-Hill Education, 2013.

[26] L. F. Charles, P. L. James y I. W. Michael, "Topologically protected states in one-dimensional continuous systems and Dirac points", *PNAS,* vol. 111, n.° 24, pp. 8759-8763, 2014.

[27] K. Alexei, "Periodic table for topological insulators and superconductors", *AIP Conference Proceedings,* vol. 1134, n.° 1, pp. 22-30, 2009.

[28] A. Altland y M. R. Zirnbauer, "Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures", *Phys. Rev. B,* vol. 55, n.° 2, pp. 1142-1161, 1997. Doi: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.1142

[29] F. Charmchi y S. Gousheh, "Massive Jackiw-Rebbi model", *Nuclear Physics B,* vol. 883, n.° 3213, pp. 256-266, 2014.

[30] M. Sadiku, Elementos de Electromagnetismo, 3.ª ed. México: Oxford University Press, 2003.

[31] I. Irodov, *Basic laws of electromagnetism*. Nueva Delhi: CBS Publishers & Distributiors, 1994.

[32] J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, 4.ª ed. Nueva York: Cambridge University Press, 2017.

[33] A. Lenard, "Exact statistical mechanics of a one-dimensional system with Coulomb forces", *Journal of Mathematical Physics,* vol. 2, n.° 5, pp. 682-693, 1961.

[34] C. Heck, *Magnetic Materials and their Applications*. Londres: Butterworth-Heinemann, 1974.

[35] E. Snelling, *Soft ferrites. Properties and applications*. Londres: Ilifee, 1969.