Revista FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Revista Facultad de Ciencias Básicas
ISSN 1900-4699
homepage: http://revistas.unimilitar.edu.co/index.php/rfcb

Vol. 14 (2) 2018, 91-99
http://dx.doi.org/10.18359/rfcb.3168

ÁRBOLES DE FORZAMIENTO SEMÁNTICO PARA LA SEMÁNTICA DE SOCIEDADES ABIERTAS

SEMANTIC FORCING TREES FOR SEMANTICS OF OPEN SOCIETIES

Manuel SIERRA-ARISTIZÁBAL

Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad Eafit, Medellín, Colombia.

* Autor corresponsal. E-mail: mahesiar@outlook.com

Historia del artículo

Recibido: Abril 10, 2018

Evaluado: Agosto 3, 2018

Aceptado: Agosto 13, 2018

Disponible: Septiembre 19, 2018

Resumen |

La semántica de sociedades biasertivas abiertas para el sistema de lógica paraconsistente P1 se caracteriza por una herramienta de inferencia visual denominada "árboles de forzamiento semántico para sociedades abiertas". Dada una fórmula, con esta herramienta se marcan los nodos del árbol asociado a esta y se determina si la fórmula es válida o no. En el caso en que la fórmula sea inválida la sociedad que la refuta está determinada por las marquillas de las hojas en su árbol de forzamiento.

Palabras clave: árbol de forzamiento; semántica; sociedad abierta

Abstract |

The semantics of open biassertive societies for the paraconsistent logic system P1, is characterized by a visual inference tool called semantic forcing trees for open societies. Given a formula, with this tool the nodes of the corresponding tree are marked, and it is determined whether the formula is valid or not. In case the formula is invalid, the society that refutes it is determined by the leaf markers in its forcing tree.

Keywords: forcing tree; semantics; biassertive societies

INTRODUCCIÓN |

El método de las tablas semánticas se presenta en Beth (1962), y lo populariza Smullyan (1968) con el nombre de "*árboles de opciones semánticas*". Con este método se examinan de forma sistemática todas las opciones que pueden refutar una proposición dada, y se determina si una de estas opciones es lógicamente viable al no generar contradicciones. Si esto ocurre, se tiene un contraejemplo, con el cual se refuta la validez de la proposición dada. Si es imposible generar el contraejemplo, es decir, si ninguna de las opciones resulta lógicamente posible, entonces la proposición analizada es válida. Este método ha tenido amplia aceptación, y como lo han hecho Fitting (1971), Carnielli (1987), o Barrero y Carnielli (2005), se ha aplicado a muchos sistemas de lógicas no clásicas.

Los árboles de forzamiento semántico que presenta Sierra (2001; 2006) no buscan construir el contraejemplo al explorar todas las opciones posibles (tal como se realiza con las tablas semánticas), sino que los árboles de forzamiento solo consideran las opciones que son deductivamente forzadas por las reglas del sistema. En consecuencia, el análisis de validez con los árboles de forzamiento semántico es más sencillo y natural con relación al que se realiza con los árboles de opciones.

La semántica de sociedades biasertivas abiertas la presentan Carnielli y Lima-Marques (1999) a fin de caracterizar el sistema deductivo P^1 presentado en Sette (1973). El sistema P^1 es paraconsistente y soporta las contradicciones a nivel de fórmulas atómicas. En las semánticas de sociedades el valor de verdad de la negación de una fórmula atómica no depende del valor de verdad de la fórmula atómica; los valores de verdad de este par de fórmulas dependen de la existencia de agentes en la sociedad que las validen o que las refuten. Es importante resaltar que el enfoque de la semántica de sociedades, a fin de solucionar el problema de las inconsistencias a nivel atómico, también es de interés para investigadores de otras áreas de la ciencia, tales como los sistemas basados en conocimiento (por ejemplo, las inconsistencias pueden aparecer en las bases de datos debido a la incompleta descripción de la información o a la descripción conflictiva generada por las diversas fuentes).

En Guarín y Montoya (2003) se extienden los árboles de forzamiento semántico para el cálculo proposicional clásico con reglas que permiten generar sociedades abiertas, con el fin de refutar fórmulas inválidas del sistema deductivo paraconsistente LBPcAt presentado en Sierra (2003).

MATERIALES Y MÉTODOS |

En este trabajo se presentan los árboles de forzamiento semántico para sociedades abiertas. Se prueba con todo detalle la equivalencia entre la presentación con árboles de forzamiento y la presentación semántica de las sociedades abiertas. Finalmente, se muestra que, si una fórmula es inválida —lo cual implica que el árbol de forzamiento de la fórmula está bien marcado—, entonces la lectura de las marquillas de las fórmulas cuasiatómicas proporciona una sociedad biasertiva abierta, con la cual se refuta la validez de la fórmula.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN |

Lenguaje de la lógica de las sociedades biasertivas abiertas (LSA)

El lenguaje de LSA consta de los conectivos binarios: →, ∧, ∨ y ↔ (condicional, conjunción, disyunción y bicondicional); de los conectivos monádicos: I, ~ y ¬ (incompatibilidad, negación y cuestionamiento); además, del paréntesis izquierdo y el paréntesis derecho. También se tiene una cantidad enumerable de fórmulas atómicas. El conjunto de fórmulas de LSA lo generan las siguientes reglas y solo ellas:

- Toda fórmula atómica es una fórmula.
- Si X es una fórmula entonces ~(X) y ¬(X) son fórmulas.
- Si p es una fórmula atómica entonces Ip es una fórmula.
- Si p es una fórmula atómica entonces ¬p y p son fórmulas *cuasiatómicas*.
- Si X y Y son fórmulas entonces (X)∧(Y), (X)∨(Y), (X)→(Y) y (X)↔(Y) son fórmulas.

Árbol de una fórmula

Sea X una fórmula, el árbol inicial *de* X se representa por *Ar[X]* y se construye al utilizar las reglas presentadas en la (Fig. 1), donde A y B son fórmulas arbitrarias.

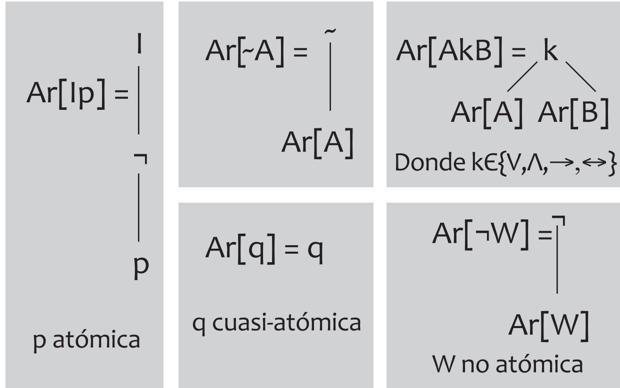

Figura 1.

Se define el árbol inicial del argumento ‘de X_1, ... , X_n se infiere Y’, como: Ar[(X_1∧ ... ∧X_n)→Y]. El nodo superior del árbol de la fórmula X se denomina “la raíz del árbol”, se denota R[X] y corresponde al operador principal de la fórmula X. Los nodos inferiores, es decir, aquellos de los cuales no salen ramas, se denomina “hojas” y corresponden a las fórmulas cuasiatómicas.

Por ejemplo, para el argumento ‘de ¬A→B y ~B↔IC se infiere ¬[C∨(A∧D)]’, donde A, B, C y D son fórmulas atómicas, el condicional asociado es: [(¬A→B) ∧ (~B↔IC)] → ¬[C∨(A∧D)] y su árbol inicial se presenta en la (Fig. 2).

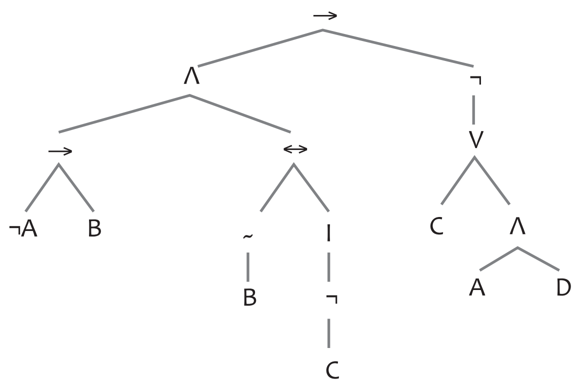

Figura 2.

Marcando los nodos de un árbol

Si un nodo C es uno de los conectivos monádicos, I, ~ o ¬, entonces su único hijo se denomina “el alcance del operador”, y a fin de hacer referencia a él se utiliza la notación *a*C.

Si un nodo *K* es uno de los conectivos binarios ∧, ∨, → o ↔, entonces para sus hijos *izquierdo y derecho* se utiliza la notación *iK* y *dK*, respectivamente.

Para toda fórmula Y, el nodo asociado a Y es la raíz de Y, *R[Y]*, la cual a su vez es el operador principal de Y en el caso que Y no sea cuasiatómica, o es la misma Y en el caso que Y sea cuasiatómica.

Para una fórmula X, H(X) el conjunto de hojas del Ar[X], y N(X) el conjunto de nodos de Ar[X].

Para cada fórmula X, una función de marca de hojas m (o simplemente función de marca), es una función de H(X) en {0, 1}.

Si *m*(p) = 1, entonces se dice que la hoja p está marcada con 1, o que es aceptada.

Si *m*(p) = ó entonces se dice que la hoja p está marcada con 0, o que es rechazada.

Cada función de marca *m* se encuentra determinada por un conjunto no vacío y enumerable de marquillas $\{m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots\}$, las cuales son funciones de H(X) en {0, 1}, definidas por las siguientes reglas:

- Aat. *Aceptación de atómico*: una fórmula atómica es aceptada si y solo si existe al menos una marquilla de la función de marca que la acepta.

$$m(at) = 1 \Leftrightarrow \exists m_q \in m,\ m_q(at) = 1 \ \textbf{(1)}$$

- A¬at. *Aceptación del cuestionamiento de atómico*: el cuestionamiento de una fórmula atómica es aceptado si y solo si existe al menos una marquilla de la función de marca que la rechaza.

$$m(\neg at) = 1 \Leftrightarrow \exists m_q \in m,\ m_q(at) = 0 \ \textbf{(2)}$$

Cada función de marca de hojas *m* se extiende a una función de marca de nodos M de N(A) en {0, 1} según las reglas primitivas para el forzamiento de marcas que se presentan a continuación (las reglas primitivas para los operadores ∧, ∨, →, ↔ y ~ son las presentadas en Sierra (2006)).

Reglas para marcar los nodos

M(h) = *m*(h) si h es una hoja.

- A¬nat. *Aceptación del cuestionamiento de no atómico*: una fórmula no atómica es rechazada cuando es cuestionada.

$$M(\neg) = 1 \Rightarrow M(a\neg) = 0 \ \textbf{(3)}$$

- Ra¬nat. *Rechazo del alcance del cuestionamiento*: las fórmulas no atómicas rechazadas son cuestionadas.

$$M(a\neg) = 0 \Rightarrow M(\neg) = 1 \ \textbf{(4)}$$

- A¬AIat. *Aceptación del cuestionamiento y aceptación de la incompatibilidad a nivel atómico*: los enunciados atómicos cuestionados que son incompatibles con su cuestionamiento son rechazados.

$$M(\neg) = M(I) = 1 \Rightarrow M(a\neg) = 0 \ \textbf{(5)}$$

- RIat. *Rechazo de la incompatibilidad a nivel atómico*: los enunciados atómicos compatibles con su cuestionamiento se aceptan y se cuestionan.

$$M(I) = 0 \Rightarrow M(\neg) = M(a\neg) = 1 \ \textbf{(6)}$$

- A¬Aa¬Iat. *Aceptación del cuestionamiento y aceptación del alcance del cuestionamiento en la incompatibilidad a nivel atómico*: los enunciados atómicos que son aceptados y cuestionados son compatibles con su cuestionamiento.

$$M(\neg) = M(a\neg) = 1 \Rightarrow M(I) = 0 \ \textbf{(7)}$$

Se dice que una fórmula X es A-válida (válida desde el punto de vista de los árboles) si y solo si para toda función de marca *m*, se tiene que *M*(R[X]) = 1.

Se dice que una fórmula X es A-inválida si no es A-válida, es decir, si existe una función de marca *m*, tal que *M*(R[X]) = 0. En este caso, se dice que la función de marca refuta la fórmula X. También se dice que el árbol de X está bien marcado (ABM, todos sus nodos están marcados de acuerdo con las reglas sin generar contradicciones).

Reglas derivadas para el forzamiento de marcas

Las reglas primitivas para el forzamiento de marcas son suficientes para estudiar las propiedades de los árboles de forzamiento. Sin embargo, en la práctica, cuando se trata de marcar todos los nodos de un árbol, es importante tener reglas que cubran todas las posibilidades. A continuación, se presenta un juego completo de reglas derivadas. Estas reglas derivadas para los conectivos ∧, ∨, →, ↔ y ~ se encuentran en Sierra (2006).

Proposición. Reglas derivadas para el cuestionamiento

- Aa¬nat. *Aceptación del alcance no atómico del cuestionamiento*: las fórmulas no atómicas que son aceptadas no son cuestionadas.

$$M(a\neg) = 1 \Rightarrow M(\neg) = 0$$

- R¬nat. *Rechazo del cuestionamiento de no atómico*: si una fórmula no atómica no es cuestionada, entonces es aceptada.

$$M(\neg) = 0 \Rightarrow M(a\neg) = 1$$

- Rat. *Rechazo de atómico*: una fórmula atómica es rechazada, si y solo si todas las marquillas de la función de marca la rechazan.

$$m(at) = 0 \Leftrightarrow \forall m_q \in m,\ m_q(at) = 0$$

- R¬at. *Rechazo del cuestionamiento de atómico*: una fórmula atómica no es cuestionada, si y solo si todas las marquillas de la función de marca la aceptan.

$$m(\neg at) = 0 \Leftrightarrow \forall m_q \in m,\ m_q(at) = 1$$

- Prueba de Aa¬nat: sea M(a¬) = 1. Supóngase que M(¬) = 1, entonces por A¬nat se infiere M(a¬) = 0, lo cual no es el caso. Por tanto, forzosamente M(¬) = 0.
- Prueba de R¬nat: sea M(¬) = 0. Supóngase que M(a¬) = 0, entonces por Ra¬nat se infiere M(¬) = 1, lo cual no es el caso. Por tanto, forzosamente M(a¬) = 1.

- Prueba de Rat: por Aat se tiene que m(at) = 1 ⇔ $\exists m_q \in m$, m_q(at) = 1, lo cual implica que m(at) = 0 ⇔ no $\exists m_q \in m$, m_q(at) = 1, es decir, m(at) = 0 ⇔ $\forall m_q \in m$, m_q(at) = 0.
- Prueba de R¬at: por A¬at se tiene que m(¬at) = 1 ⇔ $\exists m_q \in m$, m_q(at) = 0, lo cual implica que m(¬at) = 0 ⇔ no $\exists m_q \in m$, m_q(at) = 0, es decir, m(¬at) = 0 ⇔ $\forall m_q \in m$, m_q(at) = 1.

Proposición. Reglas derivadas para la incompatibilidad

- Aa¬AIat. *Aceptación del alcance del cuestionamiento y aceptación de la incompatibilidad a nivel atómico*: no son cuestionadas las fórmulas atómicas que se aceptan y además sean incompatibles con su cuestionamiento.

$$M(a\neg) = M(I) = 1 \Rightarrow M(\neg) = 0$$

- R¬Iat. *Rechazo del cuestionamiento en la incompatibilidad a nivel atómico*: si una fórmula atómica no es cuestionada entonces es incompatible con su cuestionamiento.

$$M(\neg) = 0 \Rightarrow M(I) = 1$$

- Ra¬Iat. *Rechazo del alcance del cuestionamiento en la incompatibilidad a nivel atómico*: si una fórmula atómica es rechazada entonces es incompatible con su cuestionamiento.

$$M(a\neg) = 0 \Rightarrow M(I) = 1$$

- Prueba de Aa¬AIat: sean M(a¬) = M(I) = 1. Si M(¬) = 1, como M(I) = 1, por A¬AIat se infiere que M(a¬) = 0, lo cual no es el caso.
- Prueba de R¬Iat: sea M(¬) = 0. Si M(I) = 0, por RIat se deriva que M(¬) = 1, lo cual no es el caso.
- Prueba de Ra¬Iat: sea M(a¬) = 0. Si M(I) = 0, por RIat se deriva que M(a¬) = 1, lo cual no es el caso.

Semántica para la lógica de sociedades abiertas

De acuerdo con Carnielli y Lima-Marques (1999), y Guarín y Montoya (2003), una sociedad abierta *s* consta de un conjunto enumerable de agentes $\{Ag_1, Ag_2, \ldots, Ag_n, \ldots\}$. Cada agente es una función que interpreta las fórmulas cuasiatómicas de LSA {p, ¬p : p atómica} como elementos del conjunto {0, 1}. La sociedad abierta *s* se extiende a una función S que interpreta las fórmulas de LSA en el conjunto {0, 1}, mediante las siguientes reglas primitivas para las sociedades abiertas:

- sat. *s*(p) = 1 ⇔ ∃Ag∈*s*, Ag(p) = 1, donde p es una fórmula atómica.
- *s*¬at. *s*(¬p) = 1 ⇔ ∃Ag∈*s*, Ag(p) = 0, donde p es una fórmula atómica.
- Scuasi. Si c es fórmula cuasi-atómica entonces S(c) = *s*(c) .
- S~. S(~X) = 1 ⇔ S(X) = 0.
- S∧. S(X∧Y) = 1 ⇔ S(X) = S(Y) = 1.
- S∨. S(X∨Y) = 0 ⇔ S(X) = S(Y) = 0.
- S→. S(X→Y) = 0 ⇔ S(X) = 1 y S(Y) = 0.
- S↔. S(X↔Y) = 1 ⇔ S(X) = S(Y).
- S¬nat. S(¬X) = 1 ⇔ S(X) = 0 donde X es una fórmula no atómica.
- SI. S(Ip) = 0 ⇔ S(p) = S(¬p) = 1 donde p es una fórmula atómica.
- Se dice que una fórmula X es válida si y solo si para toda sociedad *s*, S(X) = 1.

Caracterización de los árboles de forzamiento

Se define la Complejidad c como una función que asigna a cada fórmula de LSA un entero no negativo de la siguiente forma:

- C(q) = 0, donde q es una fórmula cuasiatómica.
- C(Ip) = 1, donde p es una fórmula atómica.
- C(XkY) = 1 + máximo de {C(X), C(Y)}, donde k∈{∧, ∨, →, ↔}.
- C(~X) = 1 + C(X).
- C(¬Y) = 1 + C(Y), donde Y es una fórmula no atómica.

Se define la Profundidad P como una función que asigna a cada nodo de un árbol inicial un entero no negativo de la siguiente forma:

- P(q) = 0, donde q es una fórmula cuasi-atómica.
- P(Ip) = 1, donde p es una fórmula atómica.
- P(Ar[XkY]) = 1 + máximo de {P(Ar[X]), P(Ar[Y])}, donde k∈{∧, ∨, →, ↔}.
- P(Ar[~X]) = 1 + P(Ar[X]).
- P(Ar[¬Y]) = 1 + P(Ar[Y]), donde Y es una fórmula no atómica.

Proposición. Sociedad abierta correspondiente a una función de marca

Para cada fórmula X de LSA y cada función de marca *m*, existe una sociedad s_m, tal que, M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(X) = 1.

Prueba: Sea X una fórmula de LSA, y sea *m* una función de marcas para X. Se define la función s_m del conjunto de fórmulas cuasiatómicas en el conjunto {0, 1} de la siguiente manera:

Si m_q es una marquilla de *m* entonces Ag_q es un agente de s_m, donde $Ag_q(p) = m_q(p)$.

La función s_m se extiende a una función S_m del conjunto de fórmulas de LC en el conjunto {0, 1}, mediante las reglas primitivas para las sociedades de la sección anterior. Se tiene entonces que s_m es una sociedad de LSA.

A fin de probar que M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(X) = 1, se procede por inducción sobre la complejidad de la fórmula X.

Paso base: supóngase que la C(X) = 0, esto significa que X es una fórmula cuasiatómica.

- Caso 1: X=p, con p atómica. m(p) = 1 ⇔ ∃mq∈m, mq(p) =1, por la definición de sm resulta m(p) = 1 ⇔ ∃Agq∈sm, Agq(p)=1, por la regla sat se obtiene m(p) = 1 ⇔ Sm(p) = 1, es decir m(p)=sm(p).

- Caso 2: X =¬p, con p atómica. m(¬p) = 1 ⇔ ∃mq∈m, mq(p) = 0, por la definición de sm resulta m(¬p) = 1 ⇔ ∃Ag q∈sm, Agq(p)=0, por la regla s¬at se obtiene m(¬p) = 1 ⇔ Sm(¬p) = 1, es decir m(¬p) = sm(¬p).

Se tiene entonces que *m*(X)=s_m(X), donde X es cuasiatómica. En consecuencia, se tienen, R[X] = X, M(X) = *m*(X), s_m(X) = *m*(X) y S_m(X) = s_m(X).

Se concluye entonces que M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(X) = 1.

Paso de inducción: Supóngase que C(X) ≥ 1.

Al ser C(X) ≥ 1, X debe ser una fórmula no cuasiatómica, es decir, X tiene una de las siguientes formas: *Ip*, ¬W (W no atómica), Y∧Z, Y∨Z, Y→Z, Y↔Z, ~Y (todos los casos, excepto el primero y el segundo, se prueban como en Sierra (2006)). Se analizan los casos 1 y 2.

- Caso 1: sea X = Ip, donde p es atómica. Se tiene que R[X] = I, por lo que M(R[X]) = 0 ⇔ M(I) = 0, pero por la regla RIat se tiene M(I) = 0 ⇔ [M(p) = M(¬p) = 1], lo cual por las reglas Aat y A¬at implica M(I) = 0 ⇔ [∃m1∈m, m1(p)=1 y ∃m2∈m, m2(p)=0]. En consecuencia, se tiene que M(I) = 0 ⇔ [∃Ag1∈sm, Ag1(p)=1 y ∃Ag2∈sm, Ag2(p)=0], por las reglas sat y s¬at se infiere M(I) = 0 ⇔ [sm(p) = sm(¬p) = 1], lo cual por la regla SI significa M(I) = 0 ⇔ [Sm(Ip) = 0], es decir, M(R[X]) = 1 ⇔ Sm(X) = 1.
- Caso 2: sea X = ¬W con W no atómica. Se tiene que R[X] = ¬, por lo que M(R[X]) = 1 ⇔ M(¬) = 1, pero por A¬nat se tiene M(¬) = 1 ⇔ M(a¬) = 0, y como además a¬ = R[W], resulta que M(R[X]) = 1 ⇔ [M(R[W]) = 0]. Al utilizar la hipótesis inductiva se tiene que M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(W) = 0. Por la definición de Sm¬nat se concluye que M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(¬W) = 1, es decir, M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(X) = 1.

Se tiene entonces que para todos los casos M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(X) = 1, de modo que queda así probado el paso de inducción. Por el principio de Inducción se concluye que: M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(X) = 1.

Se ha probado entonces que para cada fórmula X de LSA y para cada función de marca *m*, existe una sociedad s_m, tal que, M(R[X]) = 1 ⇔ S_m(X) = 1.

Proposición. Función de marca asociada a una sociedad abierta

Para cada fórmula X de LSA y para cada sociedad abierta *s*, existe una función de marca m_s, tal que, M_s(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1.

Prueba: sea X una fórmula de LSA y sea *s* una sociedad abierta. Se define la función de marca m_s del conjunto de hojas del árbol de X en el conjunto {0, 1} de la siguiente forma:

Si Ag_q es un agente de *s* entonces m_q es una marquilla de m_s, donde m_q(p)= Ag_q(p).

La función m_s se extiende a una función M_s del conjunto de nodos del árbol de X en el conjunto {0, 1}, mediante las reglas primitivas para el forzamiento de marcas presentadas en la sección "Marcando los nodos de un árbol". Se tiene entonces que m_s es una función de marca de nodos.

Para probar que M_s(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1, se procede por inducción sobre la *profundidad* de Ar[X].

Paso base: supóngase que P(Ar[X]) = 0, esto significa que X es una fórmula cuasiatómica.

- Caso 1: X = p, con p atómica. s(p) = 1 ⇔ ∃Agq∈s, Agq(p) = 1, por la definición de ms resulta s(p) = 1 ⇔ ∃mq∈ms, mq(p)=1, por la regla Aat se obtiene s(p) = 1 ⇔ ms(p) = 1, es decir s(p) = ms(p).
- Caso 2: X = ¬p, con p atómica. s(¬p) = 1 ⇔ ∃Agq∈s, Agq(p) = 0, por la definición de ms resulta s(¬p) = 1 ⇔ ∃mq∈ms, mq(p) = 0, por la regla A¬at se obtiene s(¬p) = 1 ⇔ ms(¬p) = 1, es decir, s(¬p) = ms(¬p).

Se tiene entonces que *s*(X)=m_s(X), donde X es cuasi-atómica. En consecuencia, se tienen, R[X] = X, M_s(X) = m_s(X), m_s(X) = *s*(X) y s(X) = S(X). Se concluye entonces que M_s(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1.

Paso de inducción: supóngase que P(Ar[X]) ≥ 1.

Al ser P(Ar[X]) ≥ 1, X debe ser una fórmula no cuasiatómica, es decir, X tiene una de las siguientes formas: *Ip*, ¬W(con W no atómica), Y∧Z, Y∨Z, Y→Z, Y↔Z, ~Y (todos los casos, excepto el primero y el segundo, se prueban como en Sierra (2006)). Se analizan los casos 1 y 2.

Caso 1: Sea X = Ip, donde p es atómica. Se tiene que R[X] = I, por lo que Ms(R[X]) = 0 ⇔ Ms(I) = 0, pero por la regla RIat se tiene Ms(I) = 0 ⇔ [Ms(p) = Ms(¬p) = 1], lo cual por las reglas Aat y A¬at implica Ms(I) = 0 ⇔ [∃m1∈ms, m1(p) = 1 y ∃m2∈ms, m2(p) = 0]. En consecuencia, se tiene que Ms(I) = 0 ⇔ [∃Ag1∈s, Ag1(p) = 1 y ∃Ag2∈s, Ag2(p) = 0], por las reglas sat y s¬at se infiere Ms(I) = 0 ⇔ [S(p) = S(¬p) = 1], lo cual por la regla SI significa Ms(I) = 0 ⇔ [S(Ip) = 0], es decir, Ms(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1.

- Caso 2: Sea X = ¬W, con W no atómica. Se tiene que R[X] = ¬, por lo que Ms(R[X]) = 1 ⇔ Ms(¬) = 1, pero por A¬nat se tiene Ms(¬) = 1 ⇔ Ms(a¬) = 0, y como además a¬ = R[W], resulta que Ms(R[X]) = 1 ⇔ Ms(R[W]) = 0. Utilizando la hipótesis inductiva se tiene que Ms(R[X]) = 1 ⇔ S(W) = 0. Por la definición de S¬nat se concluye que Ms(R[X]) = 1 ⇔ S(¬W) = 1, es decir, Ms(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1.

Se tiene entonces que para todos los casos M_s(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1, de modo que queda así probado el paso de inducción. Por el principio de inducción se concluye que: M_s(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1.

Se ha probado, entonces, que para cada fórmula X de LSA y para cada sociedad abierta *s*, existe una función de marca m_s, tal que, M_s(R[X]) = 1 ⇔ S(X) = 1.

Proposición. Caracterización semántico-deductiva de los árboles de forzamiento

1. La fórmula X es válida desde el punto de vista de los árboles si y solo si X es válida desde el punto de vista de las sociedades.
2. 2. La fórmula X es válida desde el punto de vista de los árboles si y solo si X es un teorema del sistema deductivo paraconsistente P[1].

Prueba: supóngase que X no es válida desde el punto de vista de los árboles. En consecuencia, se tiene que existe una función de marca *m*, tal que *M*(R[X]) = 0. Se tiene, entonces, por la proposición inicial de esta sección, que existe una sociedad abierta s_m, tal que S_m(X) = 0, por tanto, X no puede ser válida desde el punto de vista de las sociedades abiertas.

Supóngase ahora que X no es válida desde el punto de vista de las sociedades abiertas, entonces, existe una sociedad *s*, tal que *S*(X) = 0. Se tiene, entonces, por la proposición previa, que existe una función de marca m_s, tal que M_s(R[X]) = 0, por tanto, X no puede ser válida desde el punto de vista de los árboles.

Se concluye así que X es válida desde el punto de vista de los árboles si y solo si X es válida desde el punto de vista de las sociedades abiertas.

De acuerdo con Carnielli y Lima-Marques (1999) se sabe que los teoremas de P^1 son exactamente las fórmulas válidas desde el punto de vista de las sociedades abiertas; así, entonces, como consecuencia de la parte 1, se tiene que la fórmula X es válida desde el punto de vista de los árboles si y solo si X es un teorema del sistema deductivo P^1.

Ilustraciones

Un nodo encerrado en un círculo indica que el nodo está marcado con 1 por la función de marca, un nodo encerrado en un cuadro indica que el nodo está marcado con 0 por la función de marca (de esta forma se presenta en Sierra (2001; 2006). Un nodo encerrado en un doble círculo indica que el nodo está marcado con 1 por la marquilla(s) indicada(s) en la rama que lo precede, un nodo encerrado en un doble cuadro indica que el nodo está marcado con 0 por la marquilla(s) indicada(s) en la rama que lo precede.

Se sabe que una fórmula es A-válida si la raíz del árbol está forzosamente marcada con 1, RM1. Por otra parte, un árbol de forzamiento está mal marcado cuando su raíz se encuentra marcada con 0, y además existen dos nodos asociados a una misma fórmula, los cuales tienen marcas contrarias. Lo anterior significa que cuando el árbol de una fórmula está mal marcado, entonces la fórmula es A-válida.

Un árbol de forzamiento está bien marcado cuando su raíz está marcada con 0, todos los nodos están marcados respetando las reglas y no existen dos nodos asociados a una misma fórmula, los cuales tienen marcas contrarias. Lo anterior significa que cuando el árbol de una fórmula está bien marcado, entonces la fórmula no es A-válida. Además, las marquillas de los nodos que se derivan de las hojas del árbol inicial determinan la semántica de sociedades que refuta la validez de la fórmula.

Ilustración 1

En la (Fig. 3) se muestra un árbol de forzamiento mal marcado para la fórmula A-válida IA → [¬A → (A → B)], donde A y B son fórmulas atómicas, así como el árbol de forzamiento bien marcado de la fórmula A-inválida ¬A → (A → B).

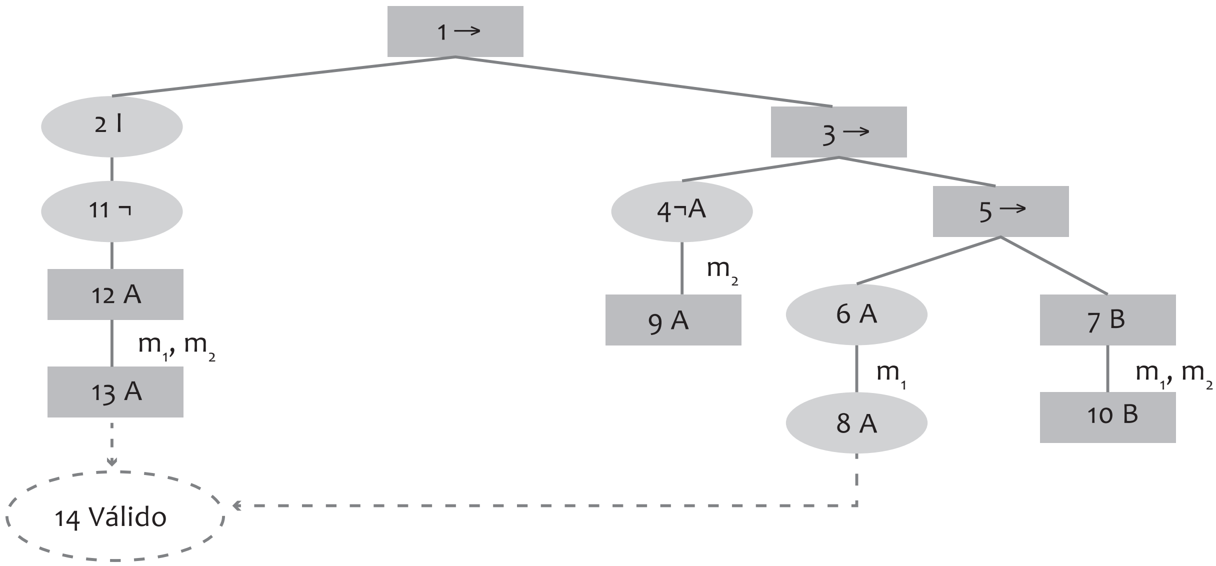

Figura 3

Justificaciones:

1. RR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R→ en 3	6, 7. R→ en 5	8. Aat en 6
9. A¬at en 4	10. Rat en 7	11. IA en 4	12. A¬Alat en 11 y 2	13. Rat en 12
14. DM en 8 y 13 (o también DM en 12 y 6)				

Obsérvese, además, que los pasos del 3 al 10 determinan un árbol bien marcado para la fórmula ¬A → (A → B), y, en consecuencia, esta es A-inválida. Además, las marquillas indican que la fórmula es refutada por la siguiente sociedad abierta: s = $\{Ag_1, Ag_2\}$, tal que $Ag_1(A) = 1$ y $Ag_2(A) = Ag_1(B) = Ag_2(B) = 0$.

Ilustración 2

En la (Fig. 4) se muestra un árbol de forzamiento mal marcado para la fórmula A-válida IB → {(A → B) → [(A → ¬B) → ¬A]}, donde A y B son fórmulas atómicas, así como el árbol de forzamiento bien marcado de la fórmula A-inválida (A → B) → [(A → ¬B) → ¬A].

Obsérvese, además, que los pasos del 3 al 15 determinan un árbol bien marcado para la fórmula (A → B) → [(A → ¬B) → ¬A], y, en consecuencia, esta es A-inválida. Adicionalmente, las marquillas indican que la fórmula es refutada por la siguiente sociedad abierta: s = $\{Ag_1, Ag_2, Ag_3\}$, tal que $Ag_1(A) = Ag_2(A) = Ag_3(A) = 1$, $Ag_2(B) = 1$ y $Ag_3(B) = 0$.

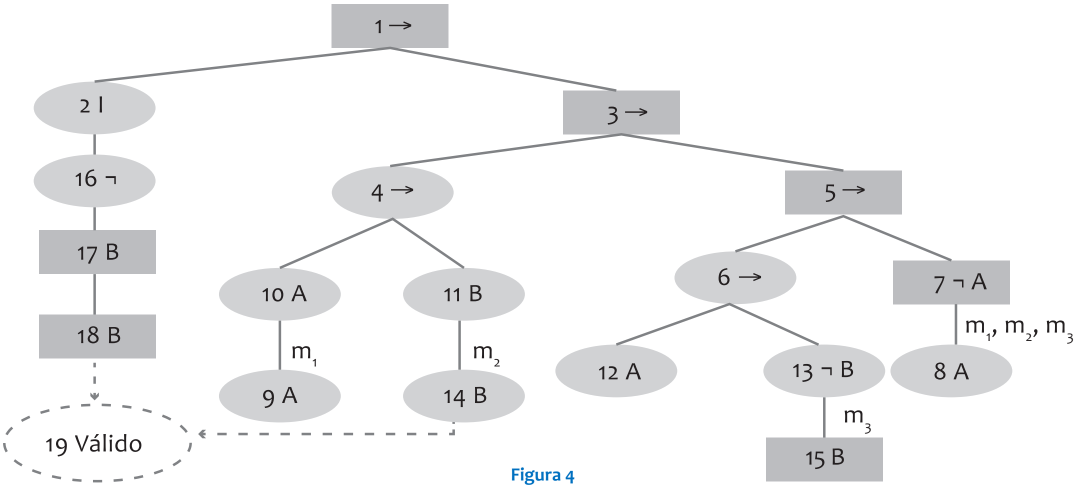

Figura 4

Justificaciones:

1. RR	2, 3. R→ en 1	4, 5. R→ en 3	6, 7. R→ en 5	8. R¬at en 7
9. IA en 8	10. Aat en 9	11. AiA→ en 10 y 4	12. IA en 10	13. AiA→ en 12 y 6
14. Aat en 11 15. A¬at en 13		16. IA en 13	17. A¬AIat en 16 y 2	18. Rat en 17
19. DM en 18 y 14 (o también DM en 17 y 11)				

El análisis que se realizó a la fórmula IB → {(A → B) → [(A → ¬B) → ¬A]}, corresponde a la formalización del siguiente argumento: si en un grupo de individuos, una propuesta genera consecuencias que son aceptadas por algunos individuos (A→B) y rechazadas por otros individuos (A→¬B), entonces no se puede asegurar que la propuesta sea rechazada por algunos individuos (¬A), salvo que exista consenso entre los individuos del grupo con respecto a la aceptación o el rechazo de las consecuencias (IB).

Ilustración 3

En la (Fig. 5) se muestra un árbol de forzamiento con la raíz forzosamente marcada con 1 para la fórmula A-válida ¬(A ∧ B) → (¬A ∨ ¬B), donde A y B son fórmulas atómicas. El análisis realizado a la fórmula ¬(A ∧ B) → (¬A ∨ ¬B) corresponde a la formalización del siguiente argumento: si un grupo de individuos rechaza la ejecución simultánea de dos proyectos (¬(A ∧ B)), entonces la ejecución de uno de los proyectos es rechazada por algunos individuos (¬A ∨ ¬B).

Ilustración 4

En la (Fig. 6) se muestra un árbol de forzamiento mal marcado para la fórmula A-válida (IA ∧ IB) → [(¬A ∨ ¬B) → ¬(A ∧ B)], donde A y B son fórmulas atómicas, así como el árbol de forzamiento bien marcado de la fórmula A-inválida (¬A ∨ ¬B) → ¬(A ∧ B).

Obsérvese, además, que los pasos del 3 al 10, junto con los del 15 al 18 (al justificar 15 como OR), determinan un árbol bien marcado para la fórmula (¬A ∨ ¬B) → ¬(A ∧ B), y en consecuencia, esta es A-inválida. Adicionalmnte, las marquillas indican que la fórmula es refutada por la siguiente sociedad abierta: s = $\{Ag_1, Ag_2, Ag_3\}$, tal que $Ag_1(A) = Ag_2(A) = Ag_3(A) = 1$, $Ag_2(B) = 1$ y $Ag_3(B) = 0$.

El análisis que se realizó a la fórmula (IA ∧ IB) → [(¬A ∨ ¬B) → ¬(A ∧ B)] corresponde a la formalización del siguiente argumento: si en un grupo de individuos, algunos de ellos rechazan la compra de uno de los productos (¬A ∨ ¬B), entonces no se puede asegurar que el grupo rechace comprar ambos productos (¬(A ∧ B)), salvo que haya consenso entre los individuos del grupo con respecto a la compra o no de cada uno de los productos (IA ∧ IB).

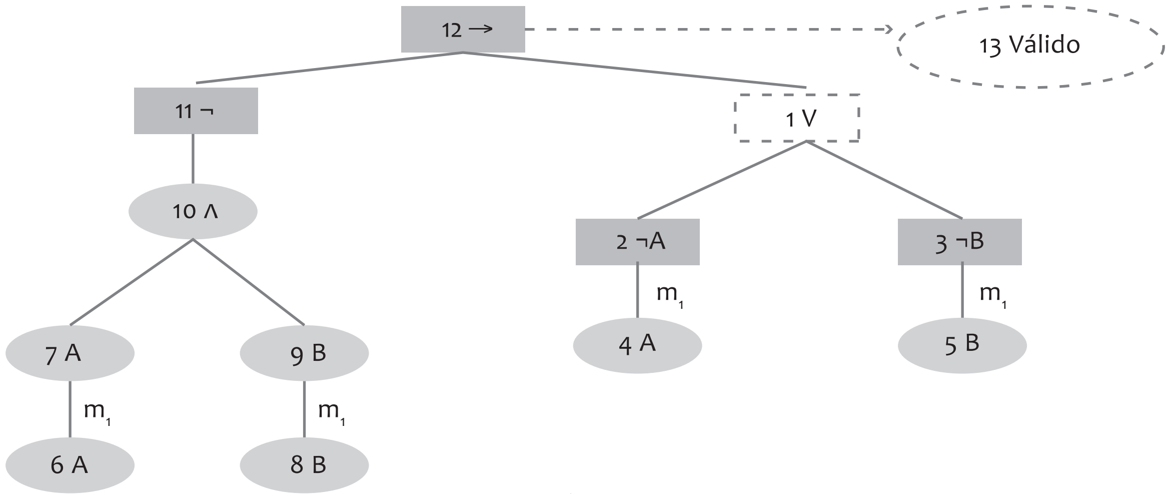

Figura 5

Justificaciones:

1. OR	2, 3. R∨ en 1	4. R¬at en 2	5. R¬at en 3	6. IA en 4
7. Aat en 6	8. IA en 5	9. Aat en 8	10. AiAd∧ en 7 y 9	11. Aa¬nat en 10
12. ORd-Ri→ en 1, 1113. RM1 en 12				

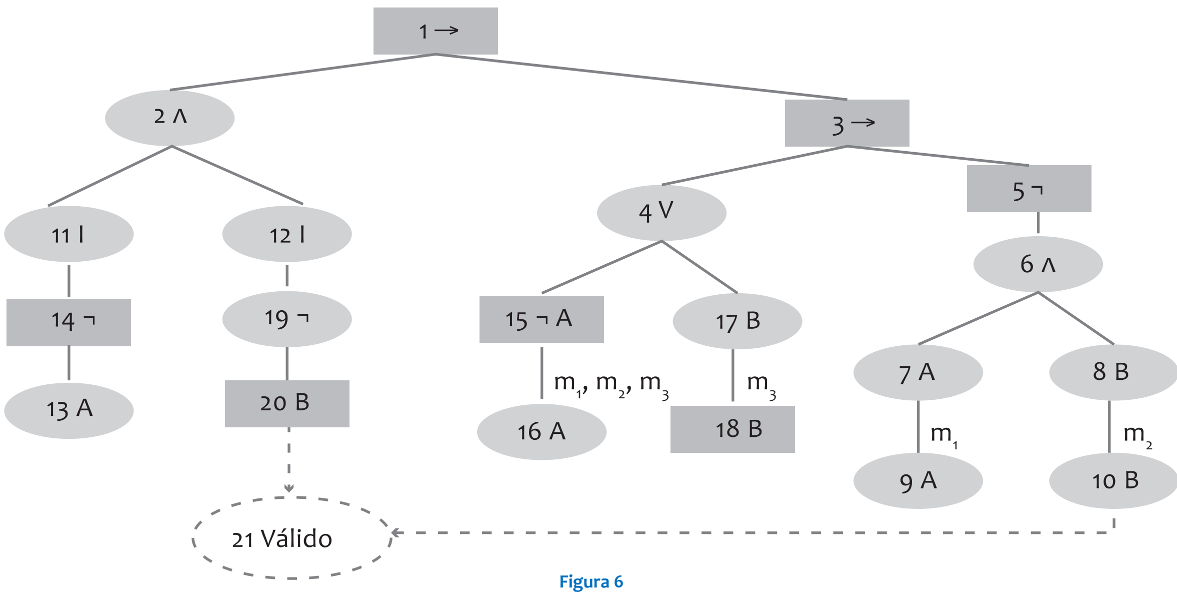

Figura 6

Justificaciones:

1. RR	2, 3. R→en 1	4, 5. R→ en 3	6. R¬nat en 5	7, 8. A∧ en 6
9. Aat en 7	10. Aat en 8	11, 12. A∧ en 2	13. IA en 7	14. Aa¬Alat en 13 y 11
15. IR en 14	16. R¬at en 1517. RiA∨ en 15 y 4		18. A¬at en 17	19. IA en 17
20. A¬Alat en 19 y 12	21. DM en 20 y 8			

CONCLUSIONES |

Con los árboles de forzamiento semántico para sociedades abiertas, la validez de una fórmula de LSA se puede determinar de manera visual y completamente mecánica. Así, por ejemplo, mediante un algoritmo se recorre el árbol de la fórmula al buscar en cada nodo la aplicación de una regla para marcarlo. Cuando la fórmula es inválida, es decir, cuando el árbol de la fórmula está bien marcado, entonces la lectura de las marquillas asociadas a las fórmulas cuasiatómicas proporciona los agentes de una sociedad abierta, con la cual se refuta la validez de la fórmula.

Desde el punto de vista didáctico, la simplicidad de las reglas para el forzamiento de marcas, en comparación con las deducciones de los sistemas axiomáticos P1 y LBPcAt, hacen de los árboles de forzamiento para sociedades abiertas una herramienta de trabajo muy útil.

REFERENCIAS |

- Barrero, T. y Carnielli, W. (2005). Tableaux sin refutación. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, *13*(2), 81-99.
- Beth, E. (1962). *Formal Methods, an Introduction to Symbolic Logic and to the Study of Effective Operations in Arithmetic and Logic*. Dordrecht: Reidel Publishing.
- Carnielli, W. (1987). Systematization of Finite Many-Valued Logics Through the Method of Tableaux. *The Journal of Symbolic Logic*, *52*(2), 473-493.
- Carnielli, W. y Lima Marquez, M. (1999). Society Semantics and Multiple-Valued Logics. *Contemporary Mathematics*, 235, 3-52. Recuperado de https://goo.gl/ig3bto.
- Fitting, M. (1971). A Tableau Proof Method Admitting the Empty Domain. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *12*(2), 219-224.
- Guarín, H. y Montoya, M. (2003). *Semántica de sociedades como un modelo o interpretación de las lógicas básicas paraconsistente y paracompleta a nivel atómico* (Trabajo de grado). Especialización en Lógica y Filosofía, Universidad Eafit.
- Sette, A. (1973). On the Propositional Calculus P^1. *Mathematic Japonicae*, *18*(13), 173-180.
- Sierra, M. (2001). Árboles de forzamiento semántico. *Revista Universidad Eafit*, 37(123), 53-72.
- Sierra, M. (2003). *Inferencia visual para la lógica básica paraconsistente y paracompleta*. Medellín: MS-Print.
- Sierra, M. (2006). Caracterización deductiva de los árboles de forzamiento semántico. *Revista Ingeniería y Ciencia*, 2(3), 73-102. Recuperado de https://goo.gl/rarWPW.
- Smullyan, R. (1968). *First Order Logic*. Berlín: Springer-Verlag.