MATEMÁTICAS

SOLUCIÓN A SISTEMAS DE ELASTICIDAD SIN FUENTE

ELASTICITY SOLUTION TO SYSTEMS WITHOUT SOURCE

Adrián Ricardo Gómez Plata B.Sc.[1]

Recibido el 16 de septiembre de 2009

Aceptado el 7 de octubre de 2009

1. Investigador Grupo Matriz, Departamento de Matemáticas, Universidad Militar Nueva Granada, adrian.gomez@unimilitar.edu.co

ISSN 1900-4699 • Volumen 5 • Número 1 • Páginas 44-49 • 2009

RESUMEN

Se presenta en este articulo la solución a los sistemas de elasticidad sin fuente relacionados a

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v)_x) = 0 \\ v_t + (u + +g(v))_x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

con condiciones acotadas medibles

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))$$

donde c es una constante.

El método que se usa para la solución del sistema, no es el de las regiones invariantes que se encuentra en la literatura. En paralelo, encontraremos las soluciones viscosas globales suaves del sistema usando el principio del máximo.

Palabras clave: Leyes de conservación hiperbólica, principio del máximo, estimaciones a priori, ecuaciones diferenciales parabólicas, problemas de cauchy's.

ABSTRACT

Is presented in this paper the solution of elasticity without source systems related

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v)_x) = 0 \\ v_t + (u + +g(v))_x = 0 \end{cases}$$

With bounded measurable conditions

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))$$

Where c is a constant.

The method used for the solution of the system is not invariant regions found in the literature. In parallel, we find the smooth global viscous solutions of the system using the maximum principle, a priori estimate.

Key words: Hyperbolic conservations Laws, maximum principle, a priori estimate, cauchy's problems.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de elasticidad son bien conocidos en los problemas de la física.

Los científicos ingleses Hooke y Newton desde el siglo XVII empezaron a forzar nuevas ideas en sus mediciones experimentales, en especial Hooke conceptualizo la noción de elasticidad para los resortes en 1660, describiendo cómo un cuerpo elástico se estira de forma proporcional a la fuerza que se ejerce sobre él, lo que dio lugar a la invención del resorte helicoidal o mejor conocido como muelle.

En física, un problema elástico queda definido por la geometría del cuerpo antes de ser deformado, las fuerzas exteriores, que dan lugar al término "potencial" del lagrangiano y las componentes del tensor de constantes elásticas. La densidad lagrangiana puede escribirse, usando el convenio de sumación de Einstein, como en:

$$L(u_i, \partial_j u_i) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - b_i u_i$$

donde :

C_{ijkl} , son las componentes de la matriz o tensor de constantes elásticas.

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_i\right)$ son las componentes del tensor de deformación.

u_i, son las componentes del vector de desplazamientos, que se define para cada punto del cuerpo.

b_i, son las fuerzas por unidad de masa, como el peso o las fuerzas centrífugas, que actúan sobre cada punto del cuerpo.

Un lagrangiano[2] es una función matemática a partir de la cual se pueden derivar las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema físico. De hecho, en física moderna el lagrangiano se considera el objeto más fundamental que describe un sistema físico.

Una ley de conservación Hiperbólica es un sistema de ecuaciones quasilineal de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \text{ con } (x,t) \in R \times R^+$$

donde $u = (u_1, ..., u_n)^T \in R^n, n \geq 1$, es una función vectorial desconocida, que modela una cantidad física y $f(f(u_1), ..., f(u_n))^T$ es un vector dado que denota un término de conservación asociado generalmente a dicha cantidad física.

Uno de estos sistemas de conservación es precisamente el sistema de elasticidad Lagrangiano en una dimensión no lineal que según Lu en [4] es

$$\begin{cases} u_t + f(v)_x = 0 \\ u_t + u_x = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

con condiciones acotadas medibles

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x))$$

donde v es la deformación, $f(v)$ es la fuerza y u la velocidad.

Para este articulo trataremos un sistema de elasticidad que generaliza el caso de los sistemas de elasticidad Lagrangianos descritos en (2), demostraremos usando el principio del máximo para ecuaciones diferenciales parabólicas la existencia de estimaciones a priori de las soluciones viscosas globales suaves de (1).

Principio del máximo – leyes de conservación hiperbólica

Evans en [1], hace una clara introducción a las ecuaciones parabólicas, operadores parabólicos y al principio del máximo débil y fuerte, en particular Murray y otro en [5] estudia el principio del máximo para ecuaciones diferenciales ordinarias para pasar al principio del máximo para ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. En especial Landis [2] hace una profunda y elegante presentación de este tipo de ecuaciones.

Lu en [4], hace una breve y precisa introducción a los sistemas de leyes de conservación y define los invariantes de Riemann.

Cálculo de estimaciones a priori

Lu en [4] garantiza la existencia de soluciones viscosas globales de (1) usando el método de las regiones invariantes para

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (u + g(v))_x = \varepsilon v_{xx} \end{cases} \qquad (3)$$

2. Véase Mecánica I, de los celebres físicos teóricos Landau-Lifshits en [3].

con las condiciones acotadas medibles enunciadas en (1).

Estimaciones a priori usando el principio del máximo

Consideremos el sistema (3) con las condiciones acotadas medibles enunciadas en (1) y suponiendo, para f, g que:

A. $g(v)$ y $f(v)$ cumplen que $f, g \in C^3$ con $f' \geq d$, $v \in R$ y que:

$$2f'' + g''(s_2 + g' - c) > 0, \text{ para } v > 0$$
$$2f'' + g''(s_2 + g' - c) < 0, \text{ para } v < 0$$
$$2f'' + g''(g' - c - s_2) > 0, \text{ para } v > 0$$
$$2f'' + g''(g' - c - s_2) < 0, \text{ para } v < 0$$

donde $s_2 = \sqrt{(g' - c)^2 + 4f'}$.

Teorema 1. Para un $\varepsilon > 0$, el problema de Cauchy (3), con las condiciones de (1) y suponiendo cumple las condiciones de A, tiene solución única global suave $(u^\varepsilon(x,t), v^\varepsilon(x,t))$ que satisface

$$\left|u^\varepsilon(x,t)\right| \leq M, \quad \left|v^\varepsilon(x,t)\right| \leq M$$

donde M es una constante positiva independiente de ε.

Demostración:

El sistema (1) se puede escribir como

$$U_t + dFU_x = 0 \qquad (4)$$

donde

$$U = (u,v)^T, \; F = R^2 \to R^2,$$
$$F : (u,v) \mapsto (cu + f(v), u + g(v)) \quad \text{y}$$
$$dF = \begin{pmatrix} c & f'(v) \\ 1 & g'(v) \end{pmatrix}$$

para calcular los valores propios de esta ultima matriz dF, se hace $\det(dF - \lambda I) = 0$, de donde

$$(c - \lambda)(g'(v) - \lambda) - f'(v) = 0$$

$$\lambda = \frac{c + g' \pm \sqrt{(g - c)^2 + 4f'}}{2}$$

llamando, $s_2 = \sqrt{(g' - c)^2 + 4f'}$, tenemos que

$$\lambda_1 = \frac{c + g' + s_2}{2}, \; \lambda_2 = \frac{c + g' - s_2}{2}$$

Los vectores propios a derecha r_1, r_2 asociados se calculan resolviendo

$$r_1 = \left[dF - \lambda_1 I \middle| 0\right], \quad r_2 = \left[dF - \lambda_2 I \middle| 0\right]$$

de donde obtenemos

$$r_1 = (g' - c + s_2, -2)^T, \quad r_2 = (g' - c - s_2, -2)^T$$

de tal forma que

$$\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = \frac{2f'' - g''(s_2 - (g' - c))}{s_2};$$

$$\nabla\lambda_2 \cdot r_2 = \frac{2f'' + g''(s_2 + (g' - c))}{s_2}$$

de donde los invariantes de Riemman son:

$$w = u + \int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2} dv, \qquad z = u + \int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2} dv$$

Calculando

$$w_v, w_u, w_{uu}, w_{uv}, w_{vv} \;\; ; \;\; z_v, z_u, z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}$$

tenemos

$$w_u = 1 + \frac{\partial}{\partial u}\int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2}\, dv = 1,$$

$$z_u = 1 + \frac{\partial}{\partial u}\int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2}\, dv = 1$$

$$w_v = 1 + \frac{\partial}{\partial v}\int_0^v \frac{g' - c + s_2}{2}\, dv = \frac{g' - c + s_2}{2}$$

$$z_v = 1 + \frac{\partial}{\partial u}\int_0^v \frac{g' - c - s_2}{2}\, dv = \frac{g' - c - s_2}{2}$$

$$w_{vv} = \frac{g''(g' - c + s_2) + 2f''}{2s_2},$$

$$z_{vv} = \frac{2f'' + g''(g' - c - s_2)}{2s_2}$$

$$w_{uu} = 0, \quad w_{uv} = 0, \quad z_{uu} = 0, \quad z_{uv} = 0$$

Multiplicando el sistema (3) por

$\nabla z(u,t) = (z_u, z_v)$, tenemos

$\nabla z(U_t + dFU_x) = \varepsilon \Delta U$, si $\nabla z dF = \lambda_1 \nabla z$,

encontramos

$$z_t + \lambda_1 z_x = \nabla z \varepsilon \Delta U = \varepsilon\,(z_u, z_v)(u_{xx}, v_{xx}) =$$

$$\varepsilon\, z_{xx} - \varepsilon\,(z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_x v_x + z_{vv}v_x^2)$$

remplazando z_{uu}, z_{uv}, z_{vv} encontramos

$$z_t + \lambda_1 z_x = \varepsilon\, z_{xx} - \varepsilon\,(z_{vv})v_x^2 =$$

$$\varepsilon\, z_{xx} - \varepsilon\left(\frac{2f'' + g''(g' - c - s_2)}{s_2}\right)v_x^2$$

Si $v > 0, \quad 2f'' + g''(g' - c - s_2) > 0$, entonces

$$z_t + \lambda_1 z_x \le \varepsilon\, z_{xx} \quad (5)$$

Si $v < 0, \quad 2f'' + g''(g' - c - s_2) < 0$, entonces

$$z_t + \lambda_1 z_x \ge \varepsilon\, z_{xx} \quad (6)$$

Multiplicando el sistema (3) por $\nabla w(u,t) = (w_u, w_v)$, tenemos $\nabla w(U_t + dFU_x) = \varepsilon \Delta U$, si $\nabla w dF = \lambda_2 \nabla w$, encontramos

$$w_t + \lambda_2 w_x = \nabla w \varepsilon \Delta U =$$

$$\varepsilon\,(w_u, w_v)(u_{xx}, v_{xx}) =$$

$$\varepsilon\, w_{xx} - \varepsilon\,(w_{uu}u_x^2 + 2w_{uv}u_x v_x + w_{vv}v_x^2)$$

remplazando w_{uu}, w_{uv}, w_{vv} encontramos

$$w_t + \lambda_1 w_x = \varepsilon\, w_{xx} - \varepsilon\,(w_{vv})v_x^2 =$$

$$\varepsilon\, w_{xx} - \varepsilon\left(\frac{2f'' + g''(g' - c + s_2)}{s_2}\right)v_x^2$$

Si $v > 0, \quad 2f'' + g''(g' - c + s_2) > 0$, entonces

$$w_t + \lambda_2 w_x \le \varepsilon\, w_{xx} \qquad (7)$$

Si $v < 0, \quad 2f'' + g''(g' - c + s_2) < 0$, entonces

$$w_t + \lambda_2 w_x \ge \varepsilon\, w_{xx} \qquad (8)$$

Tomando (5) y (7) así

$$(-z_t) + \lambda_1(-z_x) \ge \varepsilon\,(-z_{xx}) \qquad (9)$$

$$w_t + \lambda_2 w_x \le \varepsilon\, w_{xx} \qquad (10)$$

Al considerar las desigualdades (9) y (10) con variables en w y z, por el principio del máximo se pueden conseguir estimaciones

$$w(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \le N, \quad z(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \ge -N$$

y por tanto

$$\left|u^\varepsilon(x,t) \le M\right|, \quad \left|v^\varepsilon(x,t) \le M\right|$$

para dos constantes positivas M, N que dependen de la norma L^∞ en los datos iniciales.

Al tomar (6) y (8) se procede de la misma forma y se concluye lo mismo.

DISCUSION

Los sistemas de elasticidad asociados a (1) se dicen sin fuente, se puede tratar de generalizar este tipo de sistemas colocando un termino adicional asi

$$\begin{cases} u_t + (cu + f(v))_x + g_1(u,v) = 0 \\ v_t + (u + g(v))_x + g_2(u,v) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

La idea en este caso es encontrar soluciones globales de (11), guiados en el trabajo que Yan y otros realizan en [6], se puede buscar soluciones débiles al sistema (11) y de hecho Lu en [4], encuentra soluciones débiles al sistema (1) basados en métodos de compacidad compensada.

BIBLIOGRAFIA

1. Evans, Lawrence. 1998. Partial differential equation. Vol 19. American Mathematical Society.
2. Landis, E. 1997.Second order equations of elliptic and parabolic type. vol 171, American Mathematical Society.
3. Landau, L. Lifshits, M. 1985. Mecanica I, tomo I, Editorial Reverte.
4. Lu, Yuguang, 2002. Hyperbolic conservations Laws and the compensated compactos method. Vol 128, Chapman and Hall, New York,
5. Protter, M. Weinberger, H. 1999. Maximun principles in Differential Equations. Springer.
6. Yan ,J. Zhixin, C. Ming, T. 2007. Conservations Laws I: Viscosity Solutions, Revista Colombiana de Matematicas, Vol 41, pag 91-106.