UNA CARACTERIZACIÓN DE LA EQUIVALENCIA-FILA DE MATRICES DE TAMAÑO 2 x 3

A CHARACTERIZATION OF THE ROW EQUIVALENCE FOR 2X3 MATRICES

Sandra Patricia Bello Rodríguez[1] • **Solón Efrén** Losada Herrera[2] • **Jorge** Morales Paredes[1]

RESUMEN

Como los humanos evolucionan este problema también, y con ella la necesidad de aplicar herramientas prácticas para la solución rápida y eficiente de las mismas. Una de esas herramientas es precisamente son las matrices. En este artículo vemos la equivalencia de filas (matrices) como una familia, dependiendo de cuatro parámetros, lo que hace más fácil identificar cuando dos o mas matrices son equivalentes. Que para la vida practica sería muy útil para envió de información codificada.

Este artículo encontrara la equivalencia de matrices no singulares en un campo, que dependen en de tres parámetros.

Palabras clave: Matrices equivalentes, algebra lineal, matrices no singulares, sistemas lineales triangulares.

ABSTRACT

As humans evolved this problem too, and with it the need to implement practical tools for quick and efficient solution thereof. One such tool is precisely the matrices. In this article we see the equivalence of all arrays as a family size of these depends on four parameters, making it easier to identify when two or more matrices are equivalent. Which in practical life would be very useful for sending encrypted information. This article find the equivalence of nonsingular matrices over a field size, which depend on three parameters.

Key words: Equivalent matrices, non-singular matrices, Triangular linear systems.

1 Docente Cátedra, Departamento de Matemáticas Universidad Militar Nueva Granada.
2 Docente Planta, Departamento de Matemáticas Universidad Militar Nueva Granada, Autor para correspondencia: solon.losada@unimilitar.edu.co

INTRODUCCIÓN

Gracias a la geometría implícita en los sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2 x 2, con única solución, los cuales se representan en el plano cartesiano como dos rectas que se intersecan en un único punto, podemos modificarlas haciendo cambios en sus pendientes dejando el punto de intersección fijo y podemos mostrar fácilmente que para cada ε y $\delta \in \mathbb{R}$, la matriz

$$ {}^{\delta}A^{\varepsilon} = \left[\begin{array}{cc|c} a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) & (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 - a_1\delta) & a_1 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_1 + a_1 a_2 c_1 \delta - a_1^2 c_2 \delta \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 - b_2\varepsilon) & b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) & a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 + b_1 b_2 c_2 \varepsilon - b_2^2 c_1 \varepsilon \end{array}\right] $$

es equivalente a la matriz $A = \left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$

donde, ε y δ se consideraban positivos o negativos dependiendo de la conveniencia en los desplazamientos de las rectas, ahora si ε y δ recorren todos los números Reales, claramente se ve que estas nuevas matrices son equivalentes a la original.

Partiendo de este resultado, en este articulo queremos mostrar el reciproco: "Sí para cada matriz B equivalente a A, existe un ε y δ, tal que B sea igual a ${}^{\delta}A^{\varepsilon}$ ", si este fuera el caso tendríamos una caracterización completa de las matrices equivalentes a A y generalizaríamos este resultado a un campo cualquiera.

MARCO TEORICO

Para el desarrollo del artículo es necesario tener previamente algunas definiciones y resultados que servirán para la comprensión del mismo.

Matrices Equivalentes:

En la revisión bibliográfica encontramos las siguientes definiciones acerca de matrices equivalentes:

1. Grossman (2007), las define como: "Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones. Entonces se dice que A y B son equivalentes por renglones".

2. Kolman y Bernard (2008) dicen: "Se dice que una matriz A de m X n es equivalente por filas (renglones) a una matriz B de m X n, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una serie finita de operaciones elementales por fila".

3. Lay (2001) dice: "… dos matrices son equivalentes por filas si existe una sucesión de operaciones elementales de fila que transforme una matriz en la otra".

4. Poole (2003) define: "Las matrices A y B son de renglón equivalente si existe una secuencia de operaciones elementales de renglón que convierta A en B".

5. Fraleigh y Beauregard (1989) dicen: "Si la matriz B se puede obtener de la matriz A mediante operaciones elementales en las filas, entonces B es equivalente en filas a A".

6. Hill y Kolman (2000) definen: "Si A y B son dos matrices m X n, entonces A es equivalente B a si obtenemos B de A por una secuencia finita de operaciones elementales de filas o columnas".

Donde vemos que todas se asemejan en la forma de descripción de las matrices equivalentes, sin embargo, nosotros tomaremos como punto de partida para este articulo la dada por Hill y Kolman, dado que en procedimientos posteriores utilizamos el teorema escrito por ellos mismos referente a: "Si A y B son matrices m X n, entonces A es equivalente en filas (columnas) a B si y solo si existen matrices elementales $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k$ tal que $B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$". (Kolman Bernard. Hill David. 2000. Pag 61)

Además del siguiente teorema:

"Las matrices A y B de tamaño 2 X 3 son equivalentes en columnas si y solo si existe una matriz invertible Q de tamaño 2 X 2 tal que $B = QA$".

Como Q tiene 4 entradas, uno espera que cualquier caracterización de equivalencia de filas debe depender de 4 parámetros. Tenga en cuenta que el grupo GL(2)={Q en M2x2:q11 q22-q12 q21 no es igual a cero} tiene dimensión 4; la prueba de este teorema viene del hecho que el grupo GL(m) es generado por matrices elementarías (ver http://www.math.wisc.edu/~robbin/542dir/FlagsAndMatrices.pdf (pagina 6) el autor de este articulo cita la demostración de este en el siguiente libro: Steven J. León, Linear Algebra with Applications, Prentice Hall, 1994 page 59)

Definición 1: Sea $K = (K_1, K_2) \in F$, donde F es un campo, y sea A una matriz de tamaño $2 \text{ X } n$ con entradas en el mismo campo F; se define el operador $\odot$ como:

$$K \odot A = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 a_{11} & K_1 a_{12} \dots & K_1 a_{1n} \\ K_2 a_{21} & K_2 a_{22} \dots & K_2 a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i a_{ij} \end{bmatrix}_{\substack{i = 1,2 \\ j = 1,\dots,n}}$$

NOTA: La operación anterior es equivalente a la multiplicación por izquierda de la matriz diagonal $2 \text{ X} 2$ con la matriz con entradas diagonales $K_1 \ y \ K_2$.

Las propiedades del operador $\odot$ son la distributiva con respecto a la suma usual de matrices y a la suma usual de vectores en F^2 , es decir,

1- $K \odot (A_1 + A_2) = (K \odot A_1) + (K \odot A_2)$,

2- $(K_1 + K_2) \odot A = (K_1 \odot A) + (K_2 \odot A)$,

Luego el operador actúa como un producto.

En adelante si no se especifica lo contrario hablaremos de este producto entre vectores y matrices.

Notación: ${}^{\varepsilon}A^{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} {}^{\delta}A^{\varepsilon}$

Con esto presente volvemos a nuestro problema original que es:

"Sí para cada matriz B equivalente a A, existe un ε y δ, tal que B sea igual a ${}^{\delta}A^{\varepsilon}$", en el cual no llegamos a una solución afirmativa, en vez de ello encontramos lo siguiente.

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, queremos entonces ver que cada matriz B equivalente a A es de la forma $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon}$ o $K \odot {}^{\varepsilon}A^{\delta}$

para $K = (k_1, k_2) \in F$ con $k_1 \neq 0$ y $k_2 \neq 0$

Para demostrar esto es suficiente con mostrar el resultado para la matriz original y para matrices obtenidas a parir de esta usando una operación por renglones, para ello entonces consideremos los siguientes casos:

1- Veamos que A tiene la forma $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon}$,

para esto basta tomar

$k_i = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ i = 1,2 , $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ en $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon}$

y obtenemos $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon} = A.$

2- Consideremos en A la operación elemental

$F_1 \longleftrightarrow F_2$ es decir, multiplicar a A a izquierda por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ [ver 1], así con

$k_i = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ $i = 1,2$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$ en $K \odot {}^{\varepsilon}A^{\delta}$

obtenemos $K \odot {}^{\varepsilon}A^{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A$.

3- Consideremos en A la operación elemental $F_1 \longleftrightarrow \alpha F_1,$ es decir, multiplicar a A izquierda por la matriz $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, así con $k_1 = \frac{\alpha}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $\delta = 0$ y $k_2 = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $\varepsilon = 0$,

tenemos que $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$

4- Consideremos en A la operación elemental $F_2 \longleftrightarrow \beta F_2$, es decir, multiplicar a A izquierda por la matriz $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, así con $k_1 = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $\delta = 0$ y $k_2 = \frac{\beta}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $\varepsilon = 0$,

tenemos que $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} A$.

5- Consideremos la operación fundamental $F_2 \longrightarrow F_2 + hF_1$, y llamemos a esta nueva matriz B es decir tenemos, $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_1 h & b_2 + b_1 h & c_2 + c_1 h \end{bmatrix}$

así con

$k_1 = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $\delta = 0$ y $k_2 = \frac{b_2 + b_1 h}{b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$, $\varepsilon = \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_2 + a_1 h}{b_2 + b_1 h}$

Se obtiene el resultado $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon} = B$.

Concluyendo así que:

Teorema 1

Sea A la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right]$ y

$${}^{\delta}A^{\varepsilon} = \left[\begin{array}{cc|c} a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) & (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 - a_1 \delta) & a_1 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_1 + a_1 a_2 c_1 \delta - a_1^2 c_2 \delta \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 - b_2 \varepsilon) & b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) & a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2 + b_1 b_2 c_2 \varepsilon - b_2^2 c_1 \varepsilon \end{array}\right]$$

y ${}^{\varepsilon}A^{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} {}^{\delta}A^{\varepsilon}.$

Entonces toda matriz equivalente a A es de la forma $K \odot {}^{\varepsilon}A^{\delta}$ ó $K \odot {}^{\delta}A^{\varepsilon}$ donde K es el vector de constantes, como en la definición 1.

De esta manera el teorema anterior vuelve el problema de ver la equivalencia entre dos matrices de tamaño $2 \ x \ 3$ como un problema de resolver 2 sistemas no lineales triangulares de tamaño $2 \ x \ 2$. Para visualizar esto miremos el siguiente ejemplo:

Sea $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -6 \\ 4 & 3 & 24 \end{array}\right)$ y $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 23 \\ 2 & 3 & 18 \end{array}\right]$ y veamos la equivalencia entre $A \ y \ B$ de forma tradicional.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -6 \\ 4 & 3 & 24 \end{array}\right) F_1 \rightarrow \frac{F_1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -3 \\ 4 & 3 & 24 \end{bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 4F_1 \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -3 \\ 0 & 9 & 36 \end{bmatrix} F_2 \rightarrow \frac{F_2}{9}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} F_1 \rightarrow F_1 + \frac{3}{2} F_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} F_1 \rightarrow F_1 + 5F_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 23 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} F_2 \rightarrow -7F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 23 \\ 0 & -7 & -28 \end{bmatrix} F_2 + 2F_1 \rightarrow F_2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 23 \\ 2 & 3 & 18 \end{bmatrix} = B$$

Ahora aplicando el teorema 1 obtenemos:

$${}^{\delta}A^{\varepsilon} = \left[\begin{array}{cc|c} 36 & -(54 + 36\delta) & -(108 + 144\delta) \\ (72 - 54\varepsilon) & 54 & 432 - 162\varepsilon \end{array}\right]$$

La cual mostraremos que es equivalente a la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 23 \\ 2 & 3 & 18 \end{bmatrix}$ entonces tenemos que:

1. **Sistema 1:** Se compara la primera fila de ${}^{\delta}A^{\varepsilon}$ con la primera fila de B .

$36k_1 = 1 \rightarrow k_1 = \frac{1}{36}$

$-(54 + 36\delta) k_1 = 5 \rightarrow \delta = \frac{-117}{18}$

2. Sistema 2: Se compara la segunda fila de ${}^{\delta}A^{\varepsilon}$ con la primera columna de B .

- $54k_2 = 3 \rightarrow k_2 = \frac{1}{18}$
- $k_2(72 - 54\varepsilon) = 2 \rightarrow \varepsilon = \frac{2}{3}$

RESULTADOS Y DISCUSION

Encontramos una caracterización completa en los parámetros $k, \varepsilon \ y \ \delta$ para las matrices equivalentes de tamaño $2 \ x \ 3$. Además el problema de resolver equivalencia de matrices se reduce a solucionar dos sistemas independientes, donde cada uno consta de dos ecuaciones y dos incógnitas no lineal, pero de fácil solución; ya que una de ellas es lineal en una variable.

Una aplicación interesante de este trabajo es que se podrían esconder matrices a través del Teorema 1, por ejemplo en vez de escribir la matriz B mencionada en el ejemplo anterior se podría enviar la matriz A y los parámetros $k, \varepsilon \ y \ \delta$ de esta manera el destinatario podría recobrar la matriz enviada aplicando el Teorema 1.

Aun más al usar las modificaciones en las pendientes mencionadas en la introducción se podría enviar la matriz A y los ángulos de rotación de las rectas, lo cual haría más complejo el descifrar de la matriz B.

BIBLIOGRAFIA

1. Fraleigh Jhon B., Bearuregard Raymond A., Algebra Lineal., Ed. Addison Wesley., 1989. Pag. 45.
2. Kolman Bernard, Hill David. 2000. Algebra lineal. Prentice Hall. Mexico. Pag 64)
3. Kolman Bernard. Hill David. 2000. Elementary Linear Algebra. Prentice Hall.London . Pag 70).
4. Lay, David. 2001. Algebra lineal y sus aplicaciones. Prentice Hall. Mexico. Pag 7
5. Poole, David. 2003. Algebra lineal. Una introducción moderna. Thomson. Mexico. Pag 70)
6. Stanley Grossman, 2002. Algebra Lineal, editorial Mac Graw hill, EEUU. Pag 107

CONSULTA VIRTUAL

1. http://www.math.wisc.edu/~robbin/542dir/FlagsAndMatrices.pdf (Pag. 6)