

DOI: <https://doi.org/10.18359/rcin.5682>



Estimación de la función de confiabilidad usando remuestreo Jackknife y transformaciones*

Javier Ramírez Montoya^a ■ Edgar Ramos Ramírez^b ■ José Luis Martínez Salazar^c

Resumen: Para la fiabilidad de sistemas uno de los objetivos principales es estimar la función de confiabilidad usando los estimadores de Kaplan-Meier y Nelson-Aalen, bajo el enfoque no paramétrico. Cuando se recurren a técnicas computacionales, la estrategia de Jackknife delete-I brinda ventajas por sus propiedades de consistencia para la estimación de la varianza. Sin embargo, se tiene incertidumbre sobre la posibilidad de mejorar las estimaciones cuando se aumenta el número (d) de observaciones que son suprimidas en el procedimiento secuencial de Jackknife delete-d. Por otra parte, por sus propiedades asintóticas de estabilización de la varianza, las transformaciones \log y $\log(-\log)$ son usadas para encontrar intervalos de confianza (ic) para la función de confiabilidad.

En este trabajo, se propone combinar simultáneamente las dos estrategias para encontrar los ic para la función de confiabilidad, proponiendo un nuevo procedimiento que no requiere de ajuste paramétrico en el tiempo de ocurrencia del evento de interés. Además de mejorar la estimación de la función de confiabilidad cuando los porcentajes de censura son altos y los tamaños de muestra pequeños. En la investigación se realiza una comparación vía simulación con tamaños de muestras (10,25,50) y porcentajes de datos censurados (0%,15%,50%) para calcular las tasas de error (T.E) e índices de calidad (I), mejorando las estimaciones con porcentajes de censura altos (50%). Los resultados de este trabajo muestran que se puede mejorar la estimación por intervalo en escenarios complejos de censuras y tamaños de muestra a la literatura del análisis de datos en confiabilidad.

Palabras clave: estimadores no paramétricos; función de confiabilidad; intervalos de confianza; Jackknife; transformaciones

* Artículo de investigación.

- a** PhD(C) Estadística, Magíster en Ciencias Estadística, Estadístico. Universidad de Córdoba, Montería, Colombia. Correo electrónico: jaramirez@correo.unicordoba.edu.co
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5062-0510>
- b** Estadístico. Universidad de Córdoba, Montería, Colombia. Correo electrónico: adidactico@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6879-4885>
- c** PhD Estadística, Especialista en Estadística, Licenciado en Matemáticas y Física. Universidad del Sinú, Montería, Colombia. Correo electrónico: jmartinez@unisnu.edu.co
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9910-2311>

Recibido: 27/03/2021 **Aceptado:** 22/01/2022

Disponible en línea: 03/06/2022

Cómo citar: J. Ramírez Montoya, E. Ramos Ramírez, y J. L. Martínez Salazar, «Estimación de la función de confiabilidad usando remuestreo Jackknife y transformaciones», *Cien.Ing.Neogranadina*, vol. 32, n.º 1, pp. 73-85, jun 2022.

Reliability Function Estimation Using Jackknife Resampling and Transformations

Abstract: For the reliability of systems, one of the main objectives is to estimate the reliability function, using the Kaplan-Meier and Nelson-Aalen estimators, under the non-parametric approach. When computational techniques are used, the Jackknife delete-I strategy offers advantages due to its consistency properties for variance estimation. However, there is uncertainty regarding the possibility of improving the estimates when the number (d) of observations that are deleted in the Jackknife delete- d sequential procedure is increased. On the other hand, due to their asymptotic variance stabilization properties, the log and log(-log) transformations are used to find confidence intervals (CI) for the reliability function. This work proposes to simultaneously combine the two strategies to find the CI for the reliability function, proposing a new procedure that does not require parametric adjustment during the time of occurrence of the event of interest, in addition to improving the estimation of the reliability function when the censoring percentages are high and the sample sizes are small, the main objective of the study. A comparison is made in the investigation via simulation with sample sizes (10,25,50) and percentages of censored data (0%,15%,50%) to calculate the error rates (T.E) and quality indices (I) thus improving the estimates, with high censoring percentages (50%). The results of this work show that interval estimation can be improved in complex scenarios of censoring and sample sizes to the literature on reliability data analysis.

Keywords: nonparametric estimators; reliability function; confidence intervals; Jackknife; transformations

Introducción

Cuando se analizan datos relacionados con el tiempo de ocurrencia de eventos de interés en el área de la ingeniería (tiempo de falla de un sistema, tiempo de vida útil de un producto, etc.), puede ocurrir que no se conozca el tiempo observado de manera exacta, obteniendo una información parcial para algunas observaciones. Esta información parcial, denominada censura, afecta la estimación y la cantidad de herramientas que se pueden utilizar para solucionar el problema. Para su interpretación, es indispensable estimar la función de confiabilidad [1], combinar estrategias como en [2] y calcular intervalos de confianza como los usados en [3].

En los últimos años, las herramientas computacionales han tomado fuerza para la estimación de la función de confiabilidad [4]. Siendo la técnica de remuestreo Jackknife [5] una alternativa que algunas veces mejora las estimaciones y, en situaciones extremas de muestras pequeñas y altos porcentajes de censura [6], ayuda a reducir el error de estimación de la función de confiabilidad. Autores como Rostron *et al.*, recomiendan procedimientos como el *bootstrapping* para validar los intervalos de confianza para la función de confiabilidad [7].

Existen ventajas de usar transformaciones \log y $\log(-\log)$ en los IC para la función de confiabilidad. Pues, por sus propiedades asintóticas, se puede reducir la varianza y normalidad asintótica [8] para obtener IC más precisos. Lo que nos lleva a pensar que es importante combinar las estrategias de remuestreo Jackknife y las transformaciones logarítmicas para disminuir el error en la estimación de la función de confiabilidad. Este es un procedimiento diferente a la propuesta realizada por Johnson *et al.*, donde se utilizó Jackknife K-repetido para mejorar las estimaciones [9]. De este procedimiento no se tienen antecedentes en la literatura sobre confiabilidad, por lo que su comparación con [9] resultaría ser un aporte original. Aunque, se debe tener en cuenta que recientes investigaciones que combinan enfoques bayesianos para estimar la confiabilidad han presentado afectaciones de aumento de error por el fenómeno de censura [10].

Este trabajo propone un nuevo intervalo de confianza que utiliza transformaciones logarítmicas y

remuestreo Jackknife de grado (d), mayor al utilizado en la literatura de confiabilidad, con base en el estimador Kaplan-Meier y Nelson-Aalen, en situaciones de altos porcentajes de censura. Sobre el tema, algunas otras investigaciones han realizado la estimación intervalar para la función de confiabilidad usando la transformación \log . Por ejemplo, Barbiero *et al.* presentaron una comparación con diferentes escenarios, ilustrando la mejora en las estimaciones de la función de confiabilidad [11]. Mientras que Khalifeh *et al.* supusieron distribuciones paramétricas para los tiempos de falla [12], y en [13] se estimaron otras funciones como el riesgo acumulado.

El documento se encuentra organizado de la siguiente manera: primero, se describen los fundamentos teóricos que son utilizados para el desarrollo del trabajo; después se presenta la metodología para realizar el trabajo y se describe el estudio de simulación. Posteriormente, se presentan los resultados y la discusión; y, por último, se realizan las conclusiones y recomendaciones necesarias.

Estimador de Kaplan-Meier (KM)

Edward L. Kaplan y Paul Meier propusieron un método no paramétrico (no asume ninguna función de probabilidad para los tiempos de interés) y de máxima verosimilitud [14]. Es decir que este se basa en maximizar la función de verosimilitud de la muestra.

Una muestra aleatoria de tamaño n , extraída de una población, estará formada por k ($k \leq n$) tiempos $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ en los que se observan eventos. En cada tiempo t_j existen n_j individuos en riesgo y se observan d_j eventos.

$$\hat{R}_{KM}(t) = \prod_{j:t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{n_j}\right) \quad (1)$$

Donde d_j es el número de eventos en el tiempo, y t_j , y n_j es el número de personas expuestas en el tiempo t_j . En otros contextos, dicho estimador es usado para predecir valores futuros [15].

Estimador de Nelson-Aalen (NA)

Wayne Nelson y Odd Aalen sugirieron una alternativa para estimar la función de confiabilidad basada en la función de riesgo acumulada $\hat{H}(t)$, dada

por $\hat{H}(t) = \sum_{j:t_j < t} \frac{d_j}{n_j}$ [16]. Entonces, el estimador para la función de confiabilidad es:

$$\hat{R}_{NA}(t) = e^{-\{\hat{H}(t)\}} \quad (2)$$

Se debe notar que $\hat{H}(t)$ acumula las contribuciones $\frac{d_j}{n_j}$ en los sucesivos instantes de fallo t_j .

Remuestreo Jackknife *delete-d*

El método de remuestreo Jackknife *delete-d* ($d=1,2,3,4$), es una generalización del caso tradicional *delete-I*. En donde en lugar de suprimir d una observación a la vez, se suprime observaciones. Por lo tanto, el tamaño de *delete-d* muestras Jackknife es $(n-d)$ y se tienen $\binom{n}{d}$ muestras Jackknife. Los pseudovalores son dados por:

$$\hat{R}_{KM}(t_0) = \binom{n}{d} \hat{R}_{KM}(t_0) - (n-d) \hat{R}_{KM,i}(t_0) \quad (3)$$

Así, el estimador mediante la estrategia Jackknife *delete-d* es:

$$\hat{R}_{KMJ-d}(t_0) = \frac{1}{\binom{n}{d}} \sum_{i=1}^{\binom{n}{d}} \hat{R}_{KM}(t_0) \quad (4)$$

Con error estándar:

$$\hat{S}E_{KMJ-d} = \sqrt{\text{Var}(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))} = \left[\frac{n-d}{\binom{n}{d}} \sum_{i=1}^{\binom{n}{d}} (\hat{R}_{KM}(t_0) - \hat{R}_{KMJ-d}(t_0))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Por lo que bajo condiciones de regularidad se tiene que:

$$\sqrt{n}(\hat{R}_{KMJ-d}(t) - R_{KMJ-d}(t)) \xrightarrow{d} N\left(R_{KMJ-d}(t), \text{Var}(\hat{R}_{KMJ-d}(t))\right) \quad (6)$$

Donde $Z = \frac{\hat{R}_{KMJ-d}(t) - R_{KMJ-d}(t)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{R}_{KMJ-d}(t))}} \sim N$. Por lo tanto, para $d = I, II, III$ y IV la expresión para los IC usando Jackknife es dada por:

$$\left[\hat{R}_{KMJ-d}(t_0) - z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \hat{S}E_{KMJ-d}, \hat{R}_{KMJ-d}(t_0) + z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \hat{S}E_{KMJ-d} \right] \quad (7)$$

Donde $\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)$ es definido en (4). Ahora bien, ya definidos los intervalos de confianza para la función de confiabilidad mediante el remuestreo Jackknife en caso I, II, III y IV sin transformaciones, a continuación, se presenta la deducción de los intervalos teniendo en cuenta las transformaciones \log y $\log(-\log)$.

Transformaciones para \log y $\log(-\log)$ para $R(t)$

La transformación \log , sugerida inicialmente por [17], está basada en encontrar un intervalo de confianza para el logaritmo de la función de Hazard acumulada, $H(t)$. Donde, para $t_0 \in [0, T]$ se define $Y_t = \log(\hat{R}(t_0))$ Siendo $\hat{R}(t_0)$ el estimador para la función de confiabilidad seleccionado KM o NA. Se sigue por el método delta que:

$$\text{Var}(Y_t) = \left[\frac{1}{\hat{R}(t)} \right]^2 \text{Var}(R(t_0)) \quad (8)$$

Luego, un intervalo de confianza para Y_t , está dado por los límites:

$$\exp\left\{ Y_t \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(Y_t)} \right\} \quad (9)$$

Con $\widehat{\text{Var}}(Y_t) = \left[\frac{1}{\hat{R}(t)} \right]^2 \text{Var}(\hat{R}(t))$ y así, un intervalo de confianza para $R(t)$ está dado por:

$$\left[\hat{R}(t_0) \exp\left\{ -\frac{Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sigma_{R(t_0)}}{\hat{R}(t_0)} \right\}, \hat{R}(t_0) \exp\left\{ \frac{Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \sigma_{R(t_0)}}{\hat{R}(t_0)} \right\} \right] \quad (10)$$

Donde $\sigma^2_{\hat{R}(t_0)} = \frac{\text{Var}(\hat{R}(t_0))}{\hat{R}(t_0)}$. Como la función logaritmo es asimétrica, se puede utilizar la transformación logarítmica para estabilizar la varianza. De igual forma, para encontrar un IC para la función de confiabilidad mediante la transformación $\log(-\log)$. Se define $W(t) = \log(-\log(R(t)))$, se sigue por el método delta que:

$$\text{Var}(W_t) = \left[\frac{1}{\log(R(t))} \right]^2 \text{Var}[\hat{R}(t)] \quad (11)$$

Luego, un intervalo de confianza para W_t , está dado por:

$$W_t \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(W_t)} \quad (12)$$

Con $\widehat{\text{Var}}(W_t) = \left[\frac{1}{\log(\hat{R}(t))} \right]^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{R}(t))$ y así, un intervalo de confianza para $R(t_0)$ está dado por:

$$[\hat{R}(t_0)^{1/\theta}, \hat{R}(t_0)^\theta] \quad (13)$$

Donde $\exp\left\{ \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{R(t_0)}}{\log(\hat{R}(t_0))} \right\}$. El intervalo de confianza para la función de confiabilidad, a partir de la transformación $\log(-\log)$ se tiene con límites positivos y menores o iguales a uno, teniendo así un intervalo de confianza natural, puesto que la transformación está definida en todos los números reales.

Metodología

Para el desarrollo del presente trabajo se inició con la deducción de las expresiones de los intervalos de confianza para la función de confiabilidad. Lo anterior, con base en cada estimador KM y NA mediante remuestreo Jackknife *delete* I, II, III, IV, y usando las transformaciones \log y $\log(-\log)$ de los intervalos de confianza para la función de confiabilidad. Posteriormente, se elaboró un algoritmo en el software estadístico R, versión 4.0.2 [18], para comparar los resultados vía simulación de Monte Carlo. Las muestras para los tiempos observados y censurados fueron generadas con la función *rweibull* de R, considerando la generación de los tiempos observados y censurados a derecha de forma independiente para modelos *weibull*(α, β), con parámetro de forma $\alpha = 0.5$ y 2.5 , y parámetro de escala $\beta = 2.5$ y 1.5 . Con tamaño $n = (10, 25, 50)$ y porcentajes de censura del 0%, 15%, 50%. A continuación, se determinaron las coberturas, tasas de errores definidas como la proporción de intervalos de confianza para la función de confiabilidad que no contienen el valor de referencia (función de confiabilidad *Weibull* evaluada en el tiempo de interés) y amplitud de los intervalos de confianza para la función de confiabilidad. En el estudio, no se consideraron estructuras de dependencia entre los tiempos observados y censurados.

Criterio de comparación

Para establecer la estrategia que presenta mejores resultados, se calcularon los intervalos de confianza para la función de confiabilidad en cada muestra simulada. Luego, se calcularon las tasas de error, teniendo en cuenta los valores de referencia según los modelos generadores de la simulación. Adicionalmente, se calculó el índice propuesto por [19], dado por:

$$\text{Índice} = \frac{(2-LPI)}{2} \left[\frac{NR}{NN} \right] \quad (14)$$

Donde NS es el número de simulaciones (1000), NR es el nivel cobertura real (tasa de intervalos que contienen al valor de referencia), NN es el nivel nominal del intervalo (95%) y LPI es la longitud promedio de los intervalos, donde:

$$LPI = \frac{1}{NS} \sum_{i=1}^{NS} (LS_i - LI_i) \quad (16)$$

Cabe mencionar que LS_i y LI_i son el límite superior e inferior, respectivamente.

Resultados

Para deducir los nuevos intervalos se considera una muestra de n tiempos t_1, t_2, \dots, t_n con $n \geq r$, siendo r el número de datos censurados en la muestra y $(n-r)$ datos observados, definimos para la transformación \log y $\log(-\log)$:

$$Z_t = \log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)) \text{ y } W_t = \log(-\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))) \quad (17)$$

Respectivamente, obtenido de forma análoga usando el método delta. Cabe notar que:

$$\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)) \sim N \left\{ \log(R_{KMJ-d}(t_0)), \text{Var}[\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))] \right\} \quad (18)$$

Adicionalmente:

$$\log[-\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))] \sim N \left[\log[-\log(R_{KMJ-d}(t_0))], \text{Var}[\log[-\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))]] \right] \quad (19)$$

Además, como $\hat{R}_{KMJ-d}(t_0) = \exp[\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))]$, obtenemos que:

$$\text{Var}(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)) = [\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)]^2 \text{Var}[\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))] \quad (20)$$

Así, un IC $100(1-a)$ para $\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))$ es dado por los límites:

$$\log[-\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))] \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \quad (21)$$

$$\sqrt{\text{Var}[\log[-\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))]]}$$

Por otra parte, 100 un IC $100(1-a)$ para $\log[-\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))]$ es dado por los límites:

$$\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)) \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \quad (22)$$

$$\sqrt{\text{Var}[\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))]}$$

Siendo $\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)$ definido en la ecuación 4 con $d=1,2,3,4$. Por lo que:

$$\text{Var}(Z_t) = \text{Var}[\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))] \approx \quad (23)$$

$$\left(\frac{1}{\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)} \right)^2 \text{Var}(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))$$

Además:

$$Var(W_t) = Var\left(\log\left(-\log\left(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)\right)\right)\right) \approx \left[\frac{1}{\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)\log(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))}\right]^2 Var(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0)) \quad (25)$$

Donde $Var(\hat{R}_{KMJ-d}(t_0))$ es definida en la ecuación 5. No obstante, los sesgos corregidos del estimador de Kaplan-Meier pueden ser utilizados [20]. Por lo que en el presente trabajo fue incluido el pseudovalor Jackknife.

En la tabla 1 son presentados los resultados para cada escenario de simulación. Los valores dentro de la tabla corresponden a Tasas de Error/Índice, indicando en negrilla los valores con mejor comportamiento para los índices y tasas de error real de la estimación por intervalo. Las siglas de las tablas en el presente artículo (κM : estimador de Kaplan-Meier, $\log \kappa M$: transformación \log usando κM , $\log(-\log) \kappa M$: transformación $\log(-\log)$ usando κM , n : tamaño de muestra, *delete*: grado de *delete*) se presentan de forma análoga con NA : estimador Nelson-Aalen.

Tabla 1. T.E/I con 0% de datos censurados a derecha.

n	<i>delete</i>	κM	$\log \kappa M$	$\log(-\log) \kappa M$	NA	$\log(NA)$	$\log(-\log) NA$
10	I	0.101/0.732	0.230/0.627	0.276/0.590	0.101/0.732	0.196/0.655	0.276/0.590
	II	0.067/0.672	0.147/0.615	0.235/0.551	0.067/0.672	0.124/0.631	0.206/0.572
	III	0.063/0.599	0.104/0.573	0.204/0.509	0.063/0.599	0.090/0.582	0.151/0.543
	IV	0.064/0.531	0.075/0.525	0.146/0.484	0.064/0.531	0.068/0.528	0.108/0.506
25	I	0.047/0.856	0.182/0.734	0.210/0.709	0.050/0.853	0.165/0.750	0.175/0.741
	II	0.011/0.824	0.054/0.788	0.105/0.745	0.017/0.819	0.054/0.788	0.098/0.751
	III	0.003/0.776	0.027/0.757	0.061/0.731	0.003/0.776	0.027/0.757	0.047/0.742
	IV	0.000/0.732	0.000/0.732	0.000/0.712	0.000/0.726	0.000/0.735	0.000/0.733
50	I	0.060/0.888	0.169/0.785	0.154/0.799	0.056/0.892	0.156/0.797	0.154/0.799
	II	0.005/0.895	0.051/0.854	0.069/0.838	0.006/0.894	0.046/0.858	0.067/0.839
	III	0.001/0.896	0.010/0.872	0.003/0.775	0.001/0.896	0.030/0.862	0.010/0.775
	IV	0.000/0.897	0.001/0.882	0.001/0.845	0.000/0.897	0.001/0.881	0.001/0.846

Fuente: elaboración propia.

En la tabla 1 se observa la ausencia de datos censurados, situación ideal en la práctica y poco común para los estudios de ingeniería controlados. Además, se puede notar que los estimadores tradicionales (Kaplan-Meier y Nelson-Aalen), resultan ser la mejor opción, siendo, en general, aproximadamente iguales. Las estimaciones con tres dígitos decimales, muestran que los casos

de menor tasa de error coinciden con mayores índices de calidad (valores en negrilla). Lo que coincide, a su vez, con la teoría de confiabilidad y las tendencias de similitud de resultados de los estimadores Kaplan-Meier y Nelson-Aalen en [6]. Los resultados obtenidos al aumentar el porcentaje de datos censurados son presentados en la tabla 2.

Tabla 2. T.E/I con 15% de datos censurados a derecha.

n	<i>delete</i>	κM	$\log \kappa M$	$\log(-\log) \kappa M$	NA	$\log(NA)$	$\log(-\log) NA$
10	I	0.090/0.732	0.160/0.676	0.212/0.634	0.090/0.732	0.145/0.688	0.191/0.651
	II	0.059/0.658	0.090/0.636	0.109/0.623	0.059/0.658	0.082/0.642	0.111/0.621
	III	0.010/0.600	0.018/0.595	0.076/0.560	0.010/0.600	0.016/0.596	0.048/0.577
	IV	0.003/0.522	0.010/0.518	0.014/0.517	0.003/0.522	0.003/0.522	0.014/0.517

n	delete	KM	log KM	log(-log) KM	NA	log (NA)	log(-log) NA
25	I	0.070/0.835	0.120/0.790	0.100/0.809	0.070/0.835	0.130/0.781	0.070/0.835
	II	0.050/0.790	0.060/0.782	0.020/0.815	0.060/0.782	0.070/0.774	0.020/0.815
	III	0.013/0.767	0.037/0.748	0.017/0.759	0.013/0.766	0.037/0.748	0.017/0.761
	IV	0.005/0.735	0.024/0.684	0.004/0.699	0.006/0.728	0.012/0.683	0.004/0.724
50	I	0.080/0.870	0.210/0.747	0.110/0.841	0.100/0.851	0.200/0.756	0.100/0.851
	II	0.010/0.861	0.060/0.726	0.030/0.837	0.010/0.818	0.060/0.746	0.020/0.828
	III	0.008/0.819	0.017/0.719	0.016/0.816	0.008/0.798	0.010/0.713	0.012/0.798
	IV	0.002/0.716	0.008/0.679	0.002/0.799	0.005/0.699	0.003/0.697	0.004/0.763

Fuente: elaboración propia.

Se puede observar que la estrategia de combinar Jackknife, aumentado el grado de *delete*, con las transformaciones empieza a mostrar algunas estimaciones con menores tasas de error y mayor índice de calidad. Esto coincide con lo reportado en [6], donde se vio la mejora de las estimaciones usando transformación *log* para los intervalos de confianza en la función de confiabilidad. Es de resaltar que se espera que el índice aumente cuando

se disminuyen las tasas de error. No obstante, eso no siempre se cumple, ya que el resultado del índice puede estar influenciado por la amplitud y el sesgo de los IC. Pese a esto, los índices son adecuados para comparar las estimaciones mediante IC para la función de confiabilidad. En la tabla 3 son presentados los resultados en la situación más extrema del estudio; con mayores porcentajes de datos censurados.

Tabla 3. T.E/I con 50% de datos censurados a derecha.

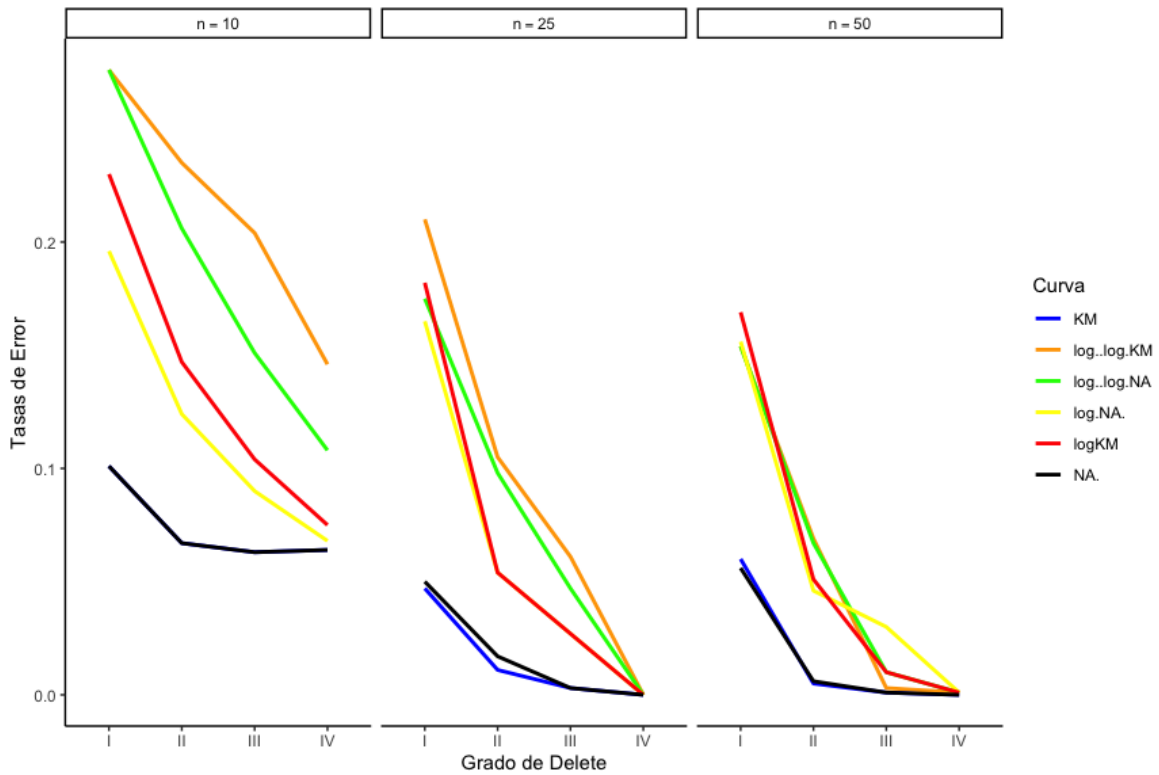
n	delete	KM	log KM	log(-log) KM	NA	log (NA)	log(-log) NA
10	I	0.122/0.699	0.136/0.688	0.125/0.697	0.122/0.699	0.134/0.690	0.119/0.702
	II	0.084/0.614	0.084/0.614	0.022/0.656	0.084/0.614	0.094/0.607	0.022/0.656
	III	0.012/0.562	0.028/0.553	0.004/0.567	0.024/0.555	0.030/0.552	0.002/0.568
	IV	0.009/0.441	0.012/0.438	0.001/0.401	0.011/0.440	0.018/0.438	0.001/0.443
25	I	0.280/0.651	0.408/0.535	0.063/0.847	0.295/0.637	0.433/0.513	0.062/0.848
	II	0.188/0.608	0.262/0.618	0.018/0.823	0.210/0.662	0.266/0.615	0.018/0.823
	III	0.180/0.653	0.220/0.621	0.040/0.764	0.180/0.653	0.220/0.621	0.040/0.764
	IV	0.300/0.535	0.300/0.535	0.100/0.688	0.300/0.535	0.300/0.535	0.100/0.688
50	I	0.486/0.489	0.614/0.367	0.354/0.615	0.507/0.469	0.630/0.352	0.374/0.596
	II	0.308/0.628	0.448/0.501	0.012/0.897	0.324/0.614	0.462/0.488	0.014/0.895
	III	0.260/0.647	0.280/0.630	0.000/0.875	0.260/0.647	0.280/0.630	0.000/0.875
	IV	0.229/0.775	0.229/0.786	0.000/0.898	0.229/0.757	0.255/0.709	0.000/0.889

Fuente: elaboración propia.

La tabla 3 indica que la estrategia de transformación $\log(-\log)$ con remuestreo Jackknife funciona en situaciones de altos porcentaje de datos censurados (50%). Asimismo, muestra menores

T.E y mayores I, confirmando la hipótesis de que combinar las dos estrategias (remuestreo y transformaciones) reduce un poco la variabilidad en las estimaciones.

Figura 1. Comportamiento de tasas de error con 0% de censura.

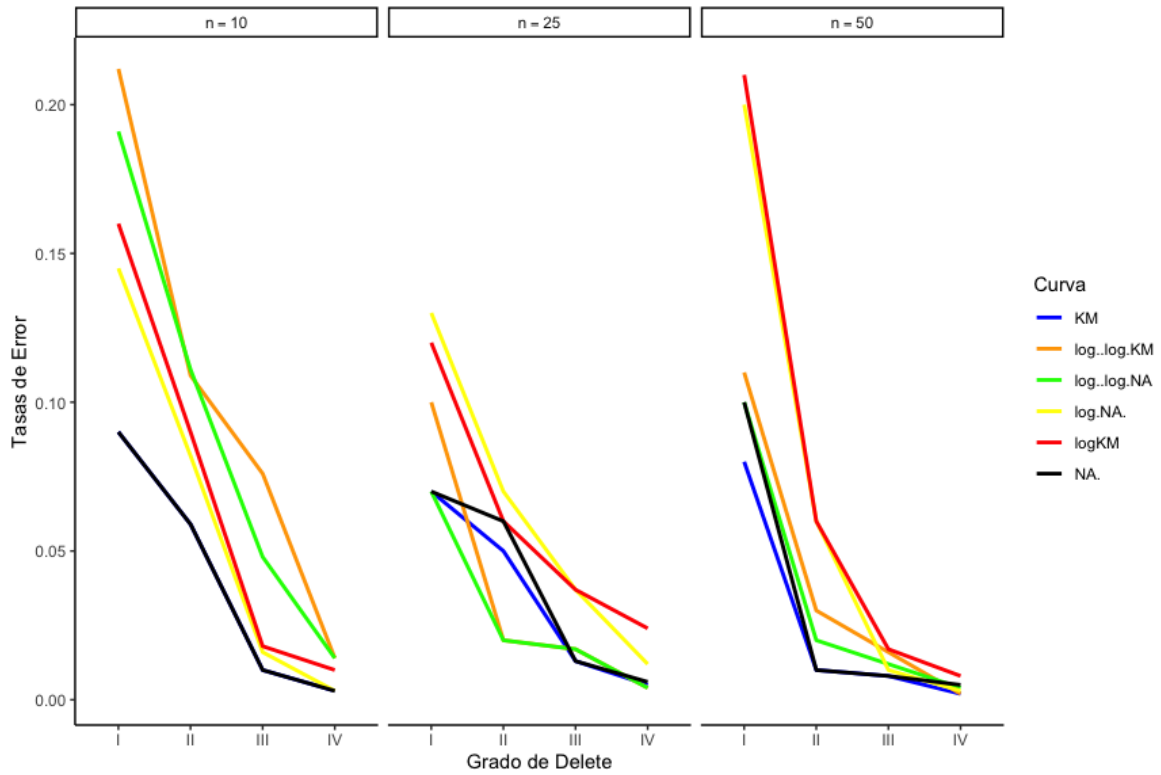


Fuente: elaboración propia.

En la figura 1 se expone que en general la tendencia es decreciente, indicando que cuando todos los datos de muestra son observados, las tasas de error disminuyen conforme aumenta el grado de delete, independientemente del tamaño de la muestra. En el grupo de transformaciones ($\log(-\log)$ KM: línea naranja, $\log(-\log)$ NA: línea verde, \log NA:

línea amarilla, \log KM: línea roja) y en el grupo de tradicionales sin transformación (KM: línea azul, NA: línea negra) se evidencian posibles agrupaciones de comportamientos cuando se aumenta el tamaño de muestra. Finalmente, se presentan las situaciones de 15% y 50% de datos censurados en las figuras 2 y 3, respectivamente.

Figura 2. Comportamiento de tasas de error con 15% de censura.

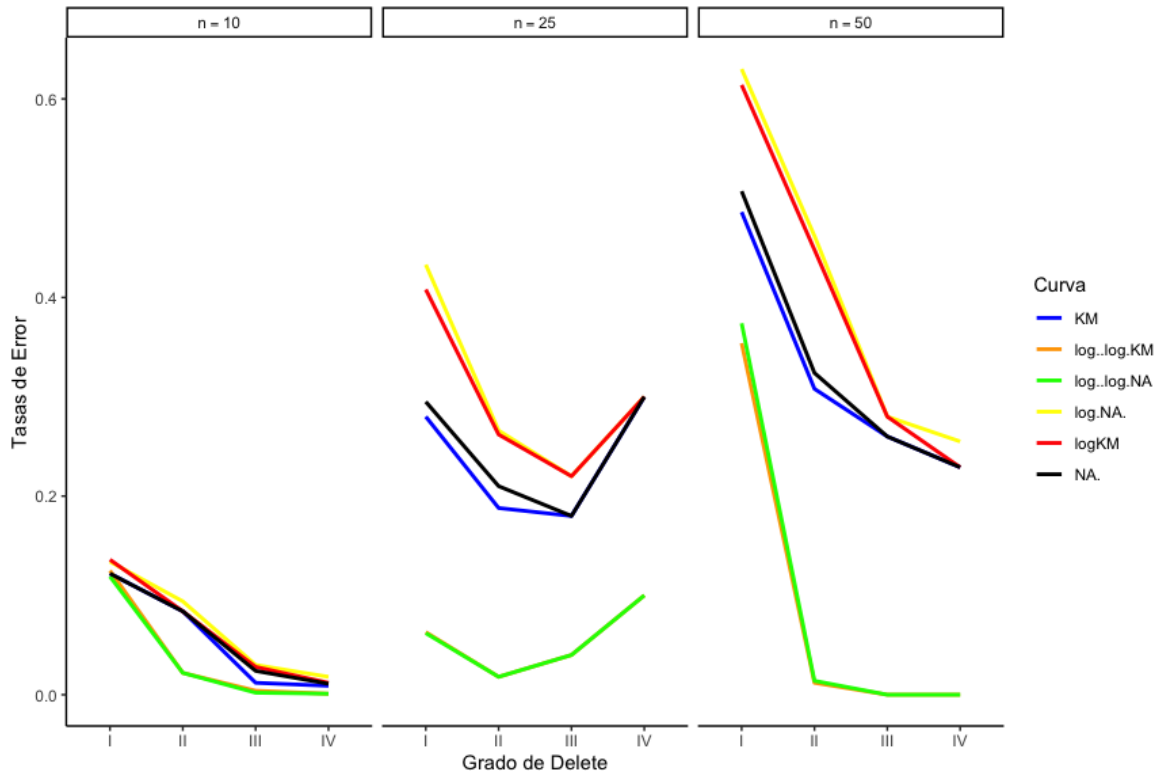


Fuente: elaboración propia.

La figura 2 muestra el comportamiento similar de decrecimiento en las tasas de error cuando se aumenta el grado de *delete*. Igualmente, se puede ver que los estimadores sin las transformaciones *log* y *log(-log)* pueden ser equivalentemente buenas opciones cuando los porcentajes de censura son bajos (15%).

Por su parte, en la figura 3, se evidencia que cuando se aumenta el porcentaje de datos censurados en la muestra, la transformación *log(-log)* ayuda a disminuir las tasas de error, resultando muy similares los comportamientos al utilizar o Kaplan-Meier y Nelson-Aalen, independientemente del grado de *delete*.

Figura 3. Comportamiento de tasas de error con 50% de censura.



Fuente: elaboración propia.

La reducción de tasas de error al utilizar la estrategia combinada cuando los tamaños de muestra aumentan, confirma los resultados de [21] para el caso de la transformación $\log(-\log)$, sin remuestreo Jackknife. Cabe mencionar que el tiempo de ejecución para obtener los resultados depende de forma sustancial del aumento del grado (d) de Jackknife y los tamaños de muestra (aproximadamente exponencial). Por otra parte, aunque para la deducción de los intervalos se requieran funciones que cambien la escala de medida, el intervalo final calculado preserva dicha característica de escala original de la unidad de tiempo.

Conclusiones y recomendaciones

La combinación de estrategias de remuestreo Jackknife *delete-IV* con la transformación en situaciones de altos porcentajes de censura (50%)

funciona. Lo anterior ayuda a reducir las tasas de error en un promedio del 20% y aumentar el **índice** de calidad, independientemente del estimador no paramétrico Kaplan-Meier y Nelson-Aalen. Esto coincide con los resultados reportados por Ramirez-Montoya en la tendencia de mejora en la estimación usando sin remuestreo Jackknife [21].

Además, se puede afirmar que cuando la cantidad de datos censurados aumenta en la muestra, la afectación en la estimación del error es alta. Cambios de 0% a 50% de datos censurados aumentan el rango de error en promedio cinco veces más, disminuyendo levemente al aumentar el grado de *delete* en Jackknife [6]. Lo cual ocurre de manera similar en la investigación de Kumar-Mahto *et al.* [10]. En algunos otros estudios relacionados [21] también se reduce el error de estimación de la función de confiabilidad [22] con remuestreo Jackknife aumentando el grado de *delete*.

Después de concluido este trabajo, se recomienda tener un recurso computacional alto para estudiar la función de confiabilidad combinando remuestreo Jackknife y transformaciones con datos que contienen observaciones censuradas. Asimismo, se recomienda para estudios futuros proponer otro lenguaje de programación para acelerar la obtención de los resultados de horas a segundos.

Referencias

- [1] I. Muhammad, X. Wang, C. Li *et al.*, “Estimation of the reliability of a stress-strength system from poisson half logistic distribution”, *Entropy*, vol. 22, no. 11, oct. 2020. DOI: <https://doi.org/10.3390/e22111307>
- [2] S. Nematollahi, S. Nazari, Z. Shayan *et al.*, “Improved Kaplan-Meier estimator in survival analysis based on partially rank-ordered set samples”, *Comput. Math. Methods Med.*, vol. 2020, ID 7827434, abr. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/7827434>
- [3] K. Nagashima, H. Noma, Y. Sato *et al.*, “Sample size calculations for single-arm survival studies using transformations of the Kaplan-Meier estimator”, *Pharm. Stat.*, vol. 20, no. 3, pp. 499-511, mar. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1002/pst.2090>
- [4] C. F. Jekel, y V Romero, “Bootstrapping and jackknife resampling to improve sparse-sample UQ methods for tail probability estimation”, en ASME 2019 Verification and Validation Symposium, may. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1115/VVS2019-5127>
- [5] M. H. Quenouille, “Problems in plane sampling”, *Inst. Math. Stat. Collect.*, vol. 20, no. 3, pp. 355-375, sept. 1949. DOI: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729989>
- [6] J. Ramírez-Montoya, I. Osuna-Vergara, J. Rojas-Mora *et al.*, “Remuestreo Bootstrap y Jackknife en confiabilidad: caso exponencial y Weibull”, *Fac. Ing.*, vol. 25, no. 41, pp. 55-62, ene.-abr. 2016. DOI: <https://doi.org/10.19053/01211129.4137>
- [7] P. D. Rostron, T. Fearn y M. H. Ramsey, “Confidence intervals for robust estimates of measurement uncertainty”, *Accredit. Qual. Assur.*, vol. 25, no. 2, pp. 107-119, dic. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00769-019-01417-4>
- [8] O. Borgan y K. Liestol, “A note on confidence intervals and bands for the survival function based on transformations”, *Scand. J. St.*, vol. 17, no. 1, pp. 35-41, 1990. <https://www.jstor.org/stable/4616153>
- [9] A. Johnson. y M. Ugochukwu, “Survival estimation using Bootstrap, Jackknife and k-repeated Jackknife methods”, *J. Mod. Appl. Stat. Methods*, vol. 13, no. 2, nov. 2014. DOI: [10.22237/jmasm/1414815240](https://doi.org/10.22237/jmasm/1414815240)
- [10] A. Kumar-Mahto, Y. Mani-Tripathi y F. Kızılaslan, “Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model for a general class of inverted exponential distributions under progressive censoring”, *J. Stat. Theory Pract.*, vol. 36, no. 3, pp. 965-987, ago. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1002/qre.2610>
- [11] A. Barbiero, “Data transformation for confidence interval improvement: an application to the estimation of stress-strength model reliability”, *Adv. Decis. Sci.*, vol. 2014, ID 485629, oct. 2014. DOI: <https://doi.org/10.1155/2014/485629>
- [12] A. Khalifeh, E. Mahmoudi y A. Chaturvedi, “Sequential fixed-accuracy confidence intervals for the stress-strength reliability parameter for the exponential distribution: two-stage sampling procedure”, *Comput. Stat.*, vol. 35, no. 4, pp. 1553-1575, feb. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00180-020-00957-5>
- [13] P. Plum, H. Lewitschnig y J. Pilz, “Exact confidence intervals for the hazard rate of a series reliability system”, *Annu. Reliab. Maintainab. Symp.*, pp. 1-6, ene. 2020. DOI: [10.1109/RAMS48030.2020.9153656](https://doi.org/10.1109/RAMS48030.2020.9153656)
- [14] E. Kaplan y P. Meier, “Estimation from incomplete observations”, *J. Am. Stat. Assoc.*, vol. 53, no. 282, pp. 457-481, jun. 1958. DOI: [10.2307/2281868](https://doi.org/10.2307/2281868)
- [15] R. P. C. Lira, R. Antunes-Foschini y E. M. Rocha, “Survival analysis Kaplan-Meier curves: a method to predict the future”, *Arq. Bras. Oftal.*, vol. 83, no. 2, pp. 5-7, dic. 2020. DOI: <https://doi.org/10.5935/0004-2749.20200036>
- [16] W. Nelson, “Hazard plotting for incomplete failure data”, *J. Qual. Technol.*, vol. 61, pp. 27-52, ene. 1969. DOI: <https://doi.org/10.1080/00224065.1969.11980344>
- [17] J. Kalbfleisch y R. Prentice, *The statistical analysis of failure time data*, 2ª ed, Nueva York: John Wiley & Sons, 1980. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118032985>
- [18] R Development Core Team, *A language and environment for statistical computing*. Vienna: R Foundation for Statistical Computing, 2007. <http://www.R-project.org>
- [19] J. C. Correa y E. Sierra, “Intervalos de confianza para la comparación de dos proporciones”, *Rev. Colomb. Estad.*, vol. 26, no. 1, pp. 61-75, 2003. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/estad/article/view/28677>
- [20] Jiang, R. “A bias-corrected Kaplan-Meier estimator”, en Asia-Pacific International Symposium on Advanced Reliability and Maintenance Modeling, pp. 1-6, ago. 2020. DOI: [10.1109/APARM49247.2020.9209357](https://doi.org/10.1109/APARM49247.2020.9209357)

- [21] J. Ramirez-Montoya. “Comparación de intervalos de confianza para la función de supervivencia con censura a la derecha”. *Revista Colombiana de Estadística*, vol. 34, no. 1, pp. 197-209, 2011. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/estad/article/view/29918>
- [22] L. Wang, y F. Yu, “Jackknife resampling parameter estimation method for weighted total least squares”, *Commun. Stat.-Theory and Methods*, vol. 49, no. 23, pp. 5810-5828, jun. 2020. doi: <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1622725>