

Análisis cinemático de un robot industrial tipo scara

Iván Alberto Olier Caparroso*

Resumen

Este artículo comprende el análisis cinemático de un robot industrial de configuración SCARA. El análisis cinemático realizado se divide en dos partes, el análisis cinemático directo y el análisis cinemático inverso. Se muestra cómo ambos análisis son importantes para los posteriores análisis dinámico, de trayectorias y de control que en conjunto permitirán el diseño de un robot industrial. Se concluye finalmente que la configuración SCARA ofrece un análisis cinemático sencillo y fácil de implementar por computador en tiempo real.

Palabras Claves: Robot Manipulador, SCARA, Cinemáticas Directa e Inversa, Matrices de Transformación Homogéneas.

1. Introducción

El análisis cinemático es uno de los primeros pasos necesarios para el diseño de un robot industrial. El análisis cinemático permite obtener información de dónde se encuentra ubicado cada elemento del sistema mecánico de un robot. Esta información es necesaria para los posteriores análisis dinámico, de trayectorias y de control.

El análisis cinemático comprende dos enfoques. El enfoque cinemático directo y el cinemático inverso.

El enfoque cinemático directo estudia la posición del elemento final (pinza, mano o herramienta) teniendo como entradas del análisis las posiciones de cada uno de los elementos que conforman el manipulador.

* Ingeniero Mecánico, Docente Programa de Ingeniería Mecatrónica, Facultad de Ingeniería de la Universidad Militar "Nueva Granada"

El enfoque cinemático inverso realiza el proceso contrario al enfoque directo.

El análisis cinemático de un robot tipo SCARA se facilita debido a la simplicidad de esta configuración. Las ecuaciones obtenidas permiten trabajar en tiempo real sin necesidad de modelos aproximados que resten desempeño al robot.

2. El Robot SCARA

El robot SCARA (*Selective Compliant Articulated Robot for Assembly*) es un robot de configuración muy popular y relativamente reciente que, como su nombre lo indica, está diseñado para operaciones de ensamble. En la figura 1 se observa este tipo de robot.

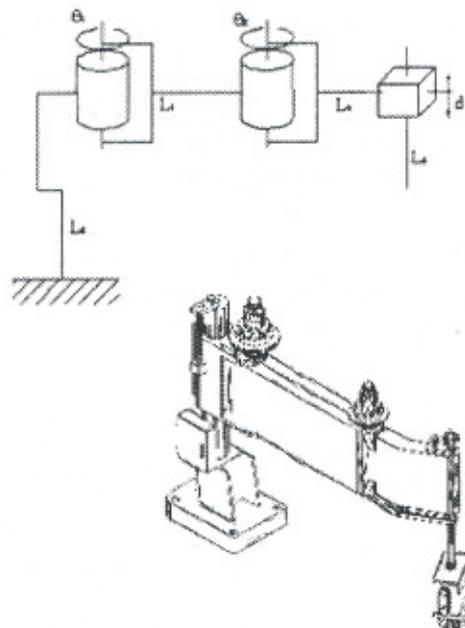


Figura No.1 - El Robot SCARA

El robot SCARA tiene cuatro grados de libertad, tres para el posicionamiento del robot y uno para la orientación de su muñeca (figura 1). El posicionamiento se realiza por medio de la combinación de dos ejes de rotación (movimiento en el plano XY) y un eje de traslación (movimiento en el eje z). Así el SCARA consigue ubicar un punto en el espacio, tal como se observa en la figura 2.

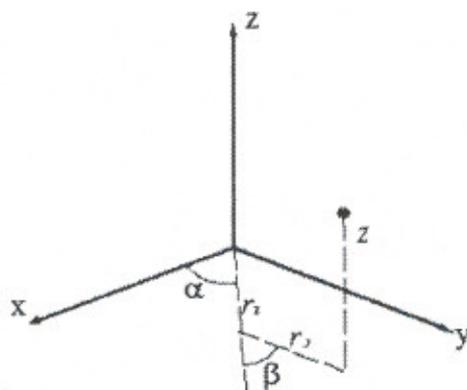


Figura No. 2 - Ubicación de un punto en el espacio por el robot SCARA

Los ejes de las dos primeras articulaciones de revolución son verticales haciendo que los eslabones se muevan en un plano horizontal mientras que el eslabón 3 se mueve según un eje vertical. En esta configuración las fuerzas gravitatorias, centrífugas y de Coriolis no cargan la estructura tal como ocurre en las demás configuraciones.

3. Concepto de Manipulador

Un manipulador es un mecanismo en cadena cinemática abierto que representa

la parte mecánica de un robot. Un manipulador está conformado por los elementos (o eslabones) y las articulaciones. La figura 3 muestra el robot SCARA y las partes de su manipulador.

Las articulaciones pueden ser de revolución o prismáticas, como se observa en la figura 4. Ambas articulaciones son de un grado de libertad y por medio de éstas se pueden crear otras articulaciones de más de un grado de libertad, tales como la articulación cilíndrica, de tornillo y esférica.

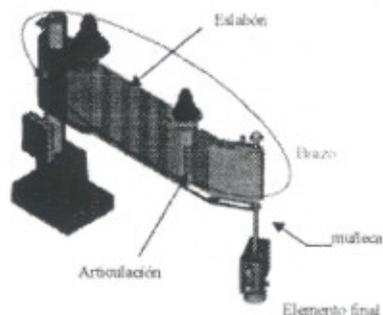


Figura No. 3 - Componentes del Manipulador



Figura No. 4 - Tipos principales de articulaciones

El robot SCARA tiene tres articulaciones de revolución (dos en el brazo y una la muñeca) y una articulación prismática, figura 5.

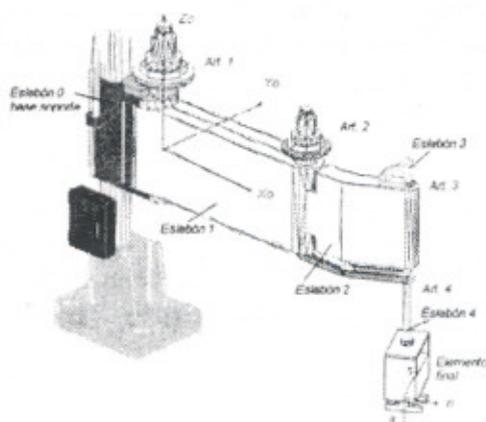


Figura No. 5 - Articulaciones del Robot SCARA

El estudio cinemático de un robot se realiza teniendo en cuenta únicamente el manipulador.

4. Análisis Cinemático

4.1. Análisis Cinemático Directo

Para el estudio de la cinemática directa se utiliza álgebra vectorial y matricial; estas herramientas permiten desarrollar un método generalizado y sistemático que describe y representa la localización de los elementos del manipulador con respecto a un sistema de coordenadas de referencia.

Como los elementos del manipulador giran o se trasladan con respecto al sistema de coordenadas de referencia, debe establecerse un sistema de coordenadas ligado al cuerpo a lo largo del eje de la articulación para cada elemento. El problema cinemático directo se reduce a encontrar una matriz de transformación que

relaciona el sistema de coordenadas ligado al cuerpo al sistema de coordenadas de referencia.

4.1.1. Transformación de Coordenadas

Una matriz de transformación homogénea está compuesta de cuatro submatrices:

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ f_{1 \times 3} & w_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matriz de rotación} & \text{Vector de posición} \\ \text{Transformación de perspectiva} & \text{escala} \end{bmatrix}$$

La submatriz $R_{3 \times 3}$ representa la matriz de rotación; la submatriz $P_{3 \times 1}$ representa el vector de posición del origen del sistema de coordenadas rotado con respecto al sistema de referencia; la submatriz $f_{1 \times 3}$ representa la transformación de perspectiva, y el cuarto elemento diagonal w es el factor de escala global.

El vector de posición $P_{3 \times 1}$ de la matriz de transformación homogénea tiene el efecto de trasladar el sistema de coordenadas 1 que tiene ejes paralelos al sistema de referencia 0 , pero cuyo origen se encuentra a una distancia $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ del sistema de coordenadas de referencia.

Una matriz de transformación homogénea 4×4 transforma un vector expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas 1 en el sistema de coordenadas de referencia 0 . Esto es, con $w=1$:

$$P_0 = T_0^1 P_1$$

4.1.2. Coordenadas Generalizadas

Las coordenadas generalizadas describen completamente la localización (posición y orientación) de un sistema físico con respecto al sistema de coordenadas de referencia. Las coordenadas generalizadas de denotan con q y representan un espacio R^n . Así para un sistema con n grados de libertad existe un vector $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ mediante el cual es posible definir el sistema. En el caso de una articulación giratoria, $q_i = \vartheta_i$, que es ángulo barrido por el eslabón i ; mientras que para una articulación prismática, $q_i = d_i$, que es la distancia recorrida por el eslabón i , figura 6.

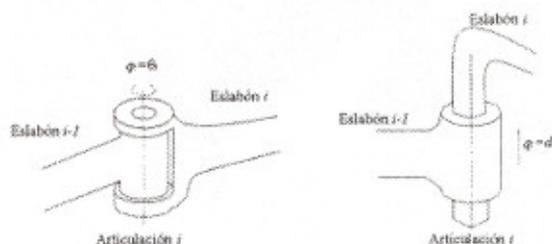


Figura No. 6 - Coordenadas generalizadas y articulaciones

4.1.3. Representación de Denavit-Hartenberg

Denavit y Hartenberg (D-H) en 1955 propusieron un método sistemático para definir un sistema de coordenadas local para cada eslabón (articulación) de un manipulador. Este método describe la relación rotacional y traslacional entre elementos adyacentes estableciendo un sistema de coordenadas (sistema ligado al cuerpo) para cada elemento de una cadena articulada.

Para un manipulador de n grados de libertad se establece un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal (x_i, y_i, z_i) donde $i=1,2,\dots,n$, mas el sistema de coordenadas de la base, en los ejes de articulación correspondientes a cada elemento.

Cada sistema de coordenadas (x_i, y_i, z_i) del manipulador corresponde a la articulación $i+1$ y esta fija al elemento i . Cuando el actuador activa la articulación i , el elemento i se moverá respecto al elemento $i-1$. Como el sistema de coordenadas i -ésimo está fijo en el elemento i , se mueve junto con el elemento i .

Los sistemas de coordenadas se basan en las siguientes tres reglas:

1. El eje z_{i+1} yace a lo largo del eje de la articulación.
2. El eje x_i es normal al eje z_{i+1} y apunta hacia fuera de este.
3. El eje y_i completa el sistema de coordenadas dextrógiro según se requiera.

Mediante estas reglas, existe la libertad de escoger la localización del sistema de coordenadas 0 en cualquier punto de la base soporte mientras que el eje z_0 esté a lo largo del eje de movimiento.

4.1.4. Parámetros Cinemáticos Estructurales

Estos parámetros describen las posiciones relativas de un par de ejes sucesivos

pertenecientes a dos sistemas de coordenadas diferentes.

Una línea recta L como la que se observa en la figura 7 se puede describir completamente en términos de mínimo, cuatro parámetros, $\theta_1, a_1, d_1, \alpha_1$. En la figura 7, el plano $OH_1O'H_2$ se dibuja perpendicular al plano x_0y_0 y contiene al eje z_0 . Este plano define el ángulo θ_1 .

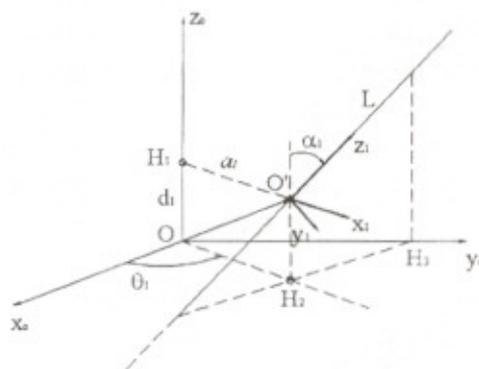


Figura No. 7 - Parámetros estructurales mínimos

Al colocar un plano paralelo al plano x_0y_0 que contenga al punto O' el punto H_1 sobre el eje z_0 queda especificado. La longitud del segmento de línea $O'H_1$ que es perpendicular tanto al eje z_0 como a la línea L (el eje z_1) es igual a a_1 es decir, el parámetro a_1 es la distancia perpendicular entre los ejes z_0 y z_1 . La distancia desde el punto H hasta el origen O a lo largo del eje z_0 está designada por d_1 , que también es la distancia perpendicular entre los ejes x_0 y x_1 .

Al dibujar un plano perpendicular al plano x_0y_0 que pase por el punto O' , la extensión de la línea H_2O' forma un

ángulo α_i con la línea L que contiene al eje z_i . Este parámetro se mide desde la línea H_iO' que es paralela al eje z_0 .

Los parámetros θ_i , a_i , d_i y α_i se pueden usar convenientemente para expresar la transformación entre dos sistemas de coordenadas.

Para un manipulador de n articulaciones, los parámetros introducidos anteriormente se pueden definir para cada sistema de coordenadas. Las posiciones relativas de dos sistemas de coordenadas adyacentes asociadas con los eslabones i e $i+1$, figura 8, se caracteriza por los siguientes parámetros: longitud a_i , ángulo de torsión α_i , distancia d_i y ángulo θ_i , entre los eslabones. Como estos parámetros dependen de la estructura de cada manipulador, se conocen como *parámetros cinemáticos estructurales* del manipulador.

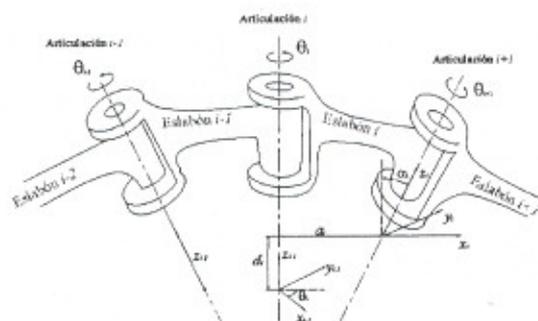


Figura No. 8 - Parámetros cinemáticos estructurales

4.1.5. Matriz de transformación D-H

Al observar la figura 8 es obvio que un punto p_i expresado en el sistema de

coordenadas i -ésimo se puede expresar en el sistema de coordenadas $i-1$ -ésimo como p_{i-1} realizando las siguientes transformaciones sucesivas.

Girar con respecto al eje z_{i-1} un ángulo de θ_i para alinear el eje x_{i-1} con el eje x_i de tal forma que el eje x_{i-1} sea paralelo a x_i y apunte en la misma dirección.

Trasladar a lo largo del eje z_{i-1} una distancia d_i para llevar en coincidencia los ejes x_{i-1} y x_i .

Trasladar a lo largo del eje x_i una distancia de a_i para traer en coincidencia también los dos orígenes de los eje x .

Girar con respecto al eje x_i un ángulo α_i para tener en coincidencia a los sistemas de coordenadas.

Cada una de estas cuatro operaciones se puede expresar mediante una matriz de rotación - traslación homogénea básica. El producto de estas cuatro matrices de transformación homogénea básicas da una matriz de transformación homogénea compuesta, A_{i-1}^i , conocida como matriz de transformación D-H para sistemas de coordenadas adyacentes i e $i-1$ de la forma:

$$A_{i-1}^i = Rot_{z_{i-1}, \theta_i} \cdot Tras_{z_{i-1}, d_i} \cdot Tras_{x_i, a_i} \cdot Rot_{x_i, \alpha_i}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{\theta_i} = \cos \theta_i, \quad s_{\theta_i} = \sin \theta_i, \quad c_{\alpha_i} = \cos \alpha_i, \quad s_{\alpha_i} = \sin \alpha_i.$$

Utilizando la matriz A_{i-1}^i se puede relacionar un punto \mathbf{p}_i en reposo en el eslabón i y expresado en coordenadas homogéneas con respecto al sistema de coordenadas i en el sistema $i-1$ establecido en el elemento $i-1$ por

$$\mathbf{p}_{i-1} = A_{i-1}^i \mathbf{p}_i$$

donde

$$\mathbf{p}_{i-1} = (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, 1)^T \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$$

4.1.6. Ecuaciones Cinemáticas para Los Manipuladores

La matriz homogénea compuesta T_0^i que especifica la localización del sistema de coordenadas i -ésimo con respecto al sistema de coordenadas de la base para un manipulador con n eslabones. Se obtiene como el producto en cadena de matrices de transformación de cadenas sucesivas A_{i-1}^i y se puede expresar como

$$T_0^i = A_0^1 A_1^2 \dots A_{i-1}^i = \prod_{j=1}^i A_{j-1}^j \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

$$= \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^i & d_0^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

R_0^i es la matriz de orientación del sistema de coordenadas i -ésimo establecido en el elemento i con respecto al sistema de coordenadas de la base.

d_0^i es el vector de posición que apunta desde el origen del sistema de coordenadas de la base hasta el origen del sistema de coordenadas i -ésimo.

4.2. Análisis Cinemático Inverso

Resolver el problema de encontrar las variables de la articulación, θ_i en articulaciones de revolución o d_i en articulaciones prismáticas, en términos de la posición y orientación del efector final es de lo que se encarga la cinemática inversa.

Las ecuaciones cinemáticas del robot SCARA definen los vectores de posición y orientación del efector final en términos de los parámetros estructurales cinemáticos y las variables de la articulación; cuando los valores de las variables de la articulación son conocidos o medidos, la posición y orientación del efector final en el sistema de coordenadas de la base puede ser determinado mediante la cinemática directa.

Para una tarea dada, el efector final del manipulador es controlado para seguir una trayectoria deseada determinada por una planeación en términos del sistema de coordenadas de la base. Estos valores deben ser necesariamente convertidos a

valores de las variables de la articulación cuando el control del manipulador trabaja con el espacio de la articulación.

En particular, cuando la posición \mathbf{d} y la orientación, $R = s, a, n$, del efector final se especifican en el sistema de coordenadas de la base, los valores de las variables de articulación, θ_i o d_i , que proporcionan la localización específica del efector final en el espacio de trabajo, deben ser determinadas por los propósitos de control. Estos valores son el propósito de la cinemática inversa, que trabaja con las ecuaciones cinemáticas en sentido contrario, ver figura 9.

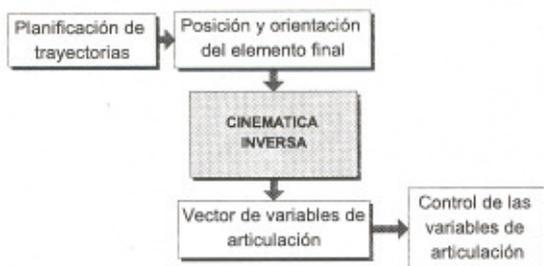


Figura No.9 - Cinemática inversa

En otras palabras, dada la posición y orientación del efector final del manipulador de n grados de libertad, y sus parámetros estructurales cinemáticos, se debe encontrar el vector de variables de articulación $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ de manera que el efector final pueda ser posicionado como se desea.

Existen diferentes métodos para encontrar a \mathbf{q} . Entre los más conocidos están el de

matrices de transformación de coordenadas, el método geométrico y por cuaterniones.

El método geométrico resulta fácil de utilizar en el robot SCARA. Este método se ilustrará más adelante.

5. Obtención de las Ecuaciones Cinemáticas de un Robot SCARA

5.1. Establecimiento de Sistemas de Coordenadas

De acuerdo con la representación de Denavit-Hartenberg, el establecimiento de los sistemas de coordenadas en el robot SCARA, se muestra en la figura 10.

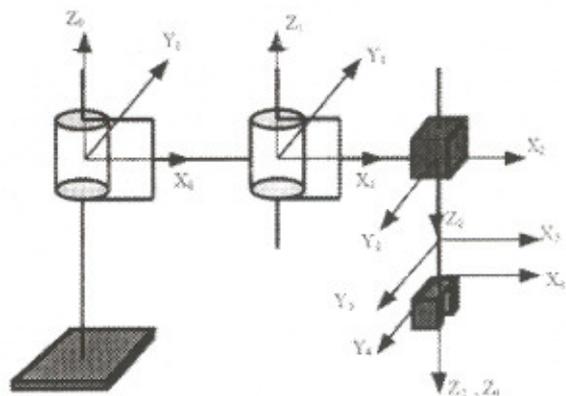


Figura No. 10 - Representación de Denavit-Hartenberg para un robot SCARA

5.2. Determinación de Parámetros Estructurales

Los parámetros estructurales del robot SCARA se observan en la figura 11. Esta selección de los parámetros obedece a los criterios antes mostrados.

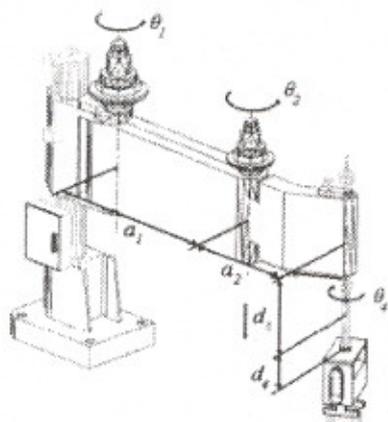


Figura No. 11 - Parámetros estructurales del robot SCARA

5.3. Ecuaciones Cinemáticas Directas del Robot SCARA

Teniendo en cuenta que las articulaciones 1, 2 y 4 son de revolución y la 3, prismática. Las matrices D-H serán las siguientes:

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3^4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de transformación desde la base hasta el elemento final es:

$$T_0^4 = \begin{bmatrix} R_0^4 & d_0^4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A_0^1 A_1^2 A_2^3 A_3^4$$

$$= \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:

$$c_1 = \cos\theta_1, \quad c_2 = \cos\theta_2, \quad c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2),$$

$$s_1 = \text{sen}\theta_1, \quad s_2 = \text{sen}\theta_2, \quad s_{12} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$$

Con estas ecuaciones se puede conocer en todo momento la posición del elemento final, respecto de las posiciones de cada una de las articulaciones.

5.4. Ecuaciones Cinemáticas Inversas del Robot SCARA

Para las configuraciones cinemáticas comunes, entre ellas la configuración SCARA, es posible utilizar un método geométrico para encontrar las variables q_1, q_2, q_4 .

La complejidad del problema cinemático inverso incrementa con el número de parámetros de articulación que no son iguales a cero. Para la mayoría de manipuladores, muchos de los a, d , son cero, los α son cero o π , etc. Para estos casos, el método geométrico es más simple y natural.

Al proyectar la configuración del manipulador sobre el plano x_b, y_b como se observa en la figura 12 se puede deducir que:

$$\cos\theta_2 = \frac{d_x^2 + d_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} = r$$

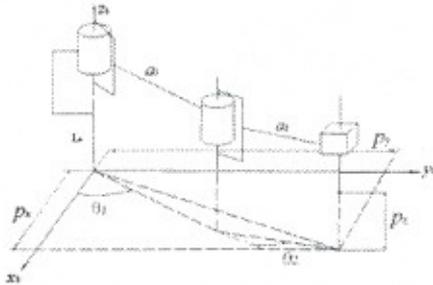


Figura No. 12 - Método geométrico en el robot SCARA

Al recurrir a la identidad trigonométrica, $\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1$, se puede comprobar que

$$\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1-r^2} \quad \text{Entonces:}$$

$$\theta_2 = \text{Atan}\left(\pm\sqrt{1-r^2}, r\right)$$

Se observa con la ecuación anterior que se tiene dos soluciones posibles dependiendo del signo del radical.

Ahora, para q_1 se tiene que

$$\theta_1 = \text{Atan}(d_y, d_x) - \text{Atan}(a_2s_2, a_1 + a_2c_2)$$

La solución del problema cinemático inverso para el robot SCARA está dado por las ecuaciones anteriores de la forma

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Atan}(d_y, d_x) - \text{Atan}(a_2s_2, a_1 + a_2c_2) \\ \text{Atan}\left(\pm\sqrt{1-r^2}, r\right) \\ d_b - (d_4 + d_H + d_z) \\ -\text{Atan}(n_y, n_x) \end{bmatrix}$$

donde

$$r = \frac{d_x^2 + d_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

Conclusiones

Con este artículo se muestra como un simple cambio en la disposición de las articulaciones, obteniéndose así una nueva configuración (SCARA), simplifica el estudio cinemático y las ecuaciones resultantes.

Así, mientras en otras configuraciones de manipuladores, el problema cinemático inverso tiene hasta ocho soluciones diferentes dificultando notablemente análisis dinámicos y de control posteriores, el robot SCARA solo tiene dos soluciones posibles. Con la ventaja adicional de que estas soluciones son mutuamente excluyentes.

Las ecuaciones obtenidas para el robot SCARA son fácilmente implementables en computador y pueden ser la base para el desarrollo de simuladores y de generadores de trayectorias utilizados en control.

Trabajos futuros se centrarán en el análisis dinámico, de trayectorias y de control de robots industriales.

Bibliografía

ANGULO, José. Robótica, tecnología y aplicaciones. Barcelona: Paraninfo, 1995. p 53.

CONTI, Raul. Parámetros Para El Diseño de Manipuladores. Santafé de Bogotá. Tesis Magister en Materiales y Procesos de Manufactura. Universidad Nacional de Colombia. 1994.

DENAVIT, J., HARTENBERG, R. "A Kinematic Notation For Lower Pair Mechanics Based On Matrices" en Applied Mechanics, 1955. pp. 215-221.

FU, K. Robótica: Control, Detección, Visión e Inteligencia. Mexico: McGraw Hill, 1989.

GROOVER, Mikell. WEISS, Mitchell. NAGEL, Roger y ODREY, Nicholas. Robótica Industrial: Tecnología, Programación y Aplicaciones. México: McGraw Hill, 1990, p. 600.

KOIVO, Anti. Fundamentals for Control Of Robotics Manipulators. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1989, p 467.

KOREN, Yoram. Robotics for Engineers. New York: McGraw Hill, 1985, p. 347.

OLIER, Iván, HERNÁNDEZ, Juan. Diseño e Implementación del Sistema de Control en Un Robot Industrial. Tesis Ingeniería Mecánica Universidad Nacional. 1998, p. 32.

OLIER, Iván, HERNÁNDEZ, Juan. Design and Evaluation of Two Methodologies of Modeling and Control for an Industrial Robot. 13th Conference On CAD/CAM, Robotics and Factories Of The Future CARS &FOF'97.

RICHARD, Paul. Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. Cambridge: MIT Press. 1992, p. 279.

SPONG, Mark, VIDYASAGAR, M. Robot Dynamic and Control. New York: John Wiley & Sons Inc. 1989, pp. 50-56, 169.