

## Flujo espacialmente variado: Método iterativo de cálculo

Julio Milán Paz\*

### Resumen

El cálculo del perfil del agua correspondiente a flujo espacialmente variado (FEV) con incremento de caudal en un canal trapezoidal prismático, usualmente se realiza aplicando el método de integración numérica -al considerar los diferenciales como diferencias finitas-, en combinación con la confección de un gráfico y la aplicación del método de ensayo y error<sup>2,3,5</sup>. Por ser ésta una metodología a todas luces laboriosa, se propone cotejarla con otra, de tipo iterativo de la forma  $V_{i+1}=f(V_i)$ , y deducir las posibles ventajas que pueda tener. Con el fin de alcanzar este objetivo, se presentará una serie de ecuaciones para ser resueltas con calculadora programable, eligiendo el sistema métrico de unidades, o si se prefiere, el sistema inglés.

### Introducción

El FEV con caudal creciente, se define como aquel en el cual la descarga aumenta en dirección del canal. Es el caso del flujo de agua a lo largo de las cunetas de una carretera, o a otra escala, el vertedero de canal lateral de la presa Hoover (Arizona, USA), mostrado en el esquema de la Figura 1.

### Notación

De acuerdo con las Figuras 2 y 3, se tiene:

- Q = caudal o descarga del canal, relativo a la abscisa x.
- q = caudal por unidad de longitud de canal:  $Q=q \cdot x$ .
- L = longitud del canal.
- A = área mojada.

\* Ingeniero Civil, Ex-profesor Asociado Universidad Nacional, Bogotá. Ex-profesor Asociado Universidad de la Salle, Bogotá. Ex-profesor Asociado Universidad Militar "Nueva Granada", Bogotá.

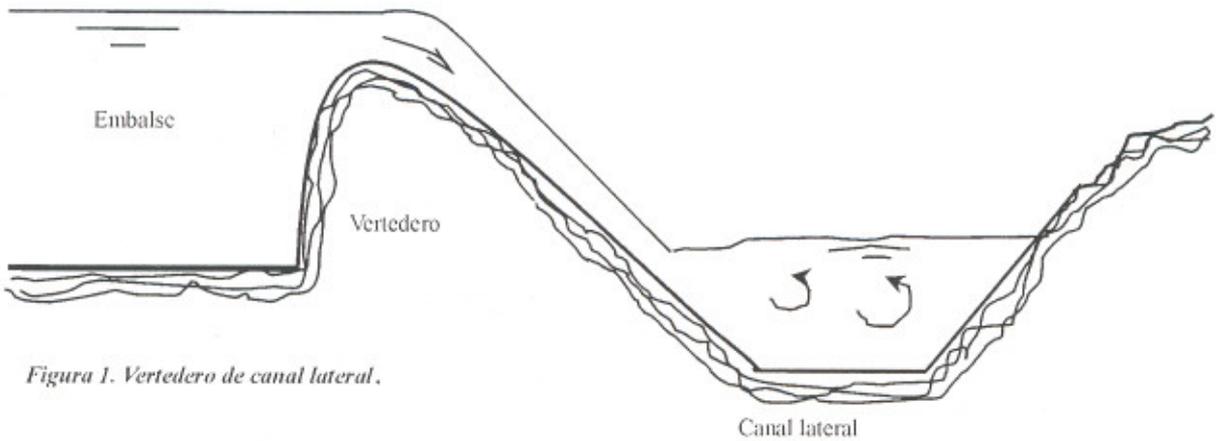


Figura 1. Vertedero de canal lateral.

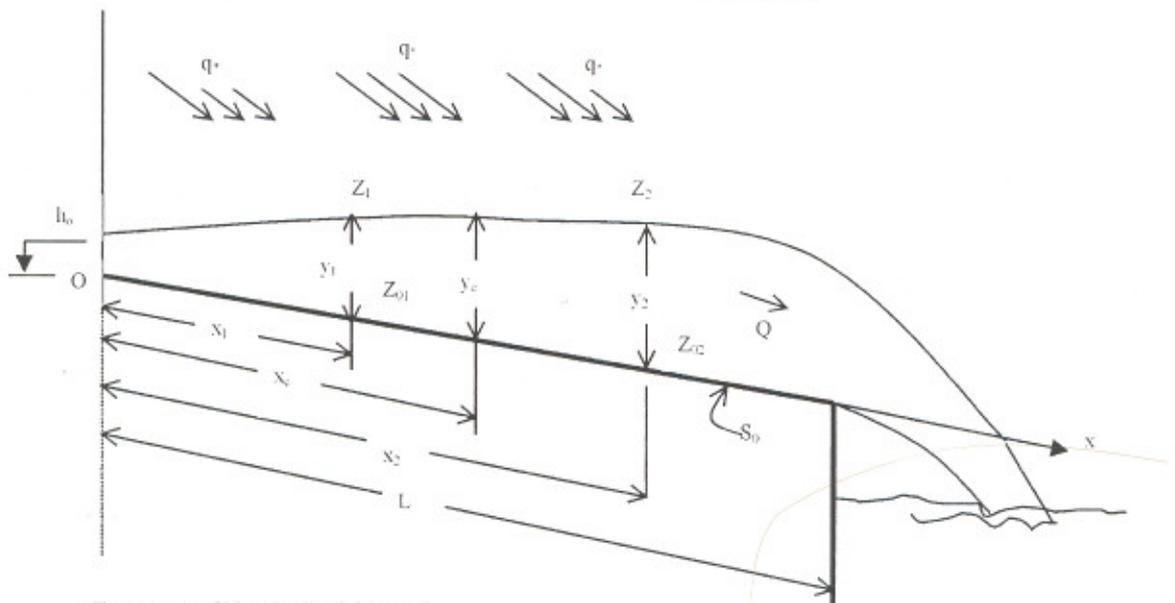


Figura 2. Perfil longitudinal del canal.

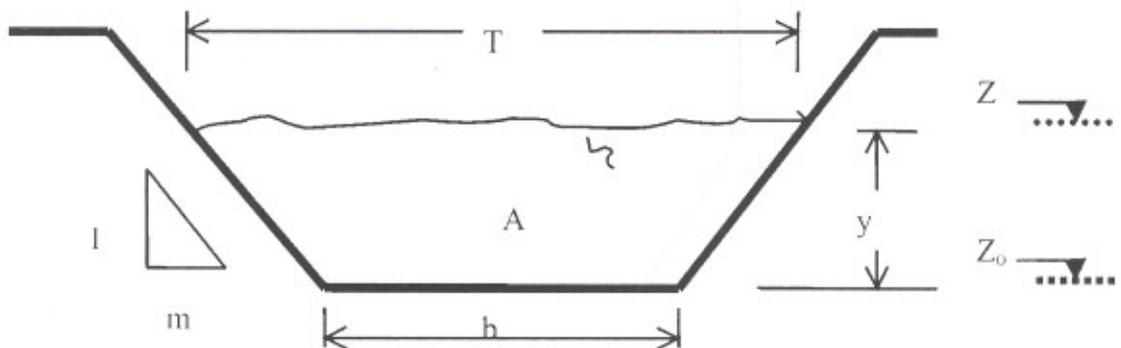


Figura 3. Sección transversal del canal.

- $b$  = ancho de fondo del canal.  
 $T$  = ancho superior.  
 $m$  = pendiente de las paredes del canal [1V:mH].  
 $P$  = perímetro mojado.  
 $D$  = profundidad hidráulica.  
 $R$  = radio hidráulico.  
 $y_c$  = profundidad del flujo en la sección de control (profundidad crítica)  
 $x$  = abscisa de la sección de control.  
 $y_1^c$  = profundidad de abscisa  $x$ , calculada aguas arriba de la sección de control.  
 $Z_1$  = elevación del nivel del agua relativa a  $x$ .  
 $Z_{o1}$  = elevación del fondo del canal relativa a  $x$ .  
 $y_2$  = profundidad de abscisa  $x$ , calculada aguas abajo de la sección de control.  
 $Z_2$  = elevación del nivel del agua relativa a  $x$ .  
 $Z_{o2}$  = elevación del fondo del canal relativa a  $x$ .  
 $g$  = aceleración de la gravedad:  $g=9,81$  m/seg<sup>2</sup> = 32,2 piés/seg<sup>2</sup>.  
 $S_o$  = pendiente longitudinal del fondo del canal.  
 $S_f$  = pendiente de la línea de energía.  
 $\frac{dy}{dx}$  = pendiente de la superficie del agua.  
 $n$  = factor de rugosidad de Manning.  
 $C$  = coeficiente de Chézy.  
 $u$  = factor numérico de la fórmula de Manning:  $Q = \frac{u}{n} AR^{2/3} \sqrt{S_o}$  { $u=1,00$  en el sistema métrico;  $u=1,49$  en el sistema inglés}.  
 $\Delta y'$  = diferencia entre elevaciones del nivel del agua correspondiente a dos secciones consecutivas.

$N_F$  = número de Froude.

La equivalencia de cada variable en el programa del Cuadro 1, es:

$q \equiv Q$   
 $b \equiv B$   
 $m \equiv M$   
 $x_c \equiv XC$   
 $y_c \equiv YC$   
 $y_1 \equiv Y1$   
 $y_2 \equiv Y2$   
 $h_0 \equiv H0$   
 $z_1 \equiv Z1$   
 $z_2 \equiv Z2$   
 $\Delta y_c \equiv DY$   
 $S_0 \equiv S$   
 $n \equiv N$   
 $g \equiv G$   
 $t \equiv T$   
 $u \equiv U$

## Análisis

Se sabe que la ecuación dinámica del FEV con incremento de gasto, está expresada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f - 2Qq_1 / gA^2}{1 - Q^2 / gA^2 D} \quad (1)$$

Si la longitud del canal es suficientemente grande, existe una sección a partir de la cual, aguas arriba, el flujo es subcrítico, en tanto que aguas abajo, es super crítico. Antes de Keulegan<sup>4</sup>, la posición de dicha sección se determinaba gráficamente<sup>2</sup>, hasta cuando él propuso (1952), que el flujo es crítico, si  $\frac{dy}{dx} = 0$  y  $N_F = 1$ , criterio que

aplicado a la Ecuación(1)le permitió deducir, que la sección de control se encuentra, a partir del inicio del canal, a la distancia

$$x_c = \frac{8q_c^2}{T_c^2 g \left[ S_o - \frac{P_c g}{C^2 T_c} \right]^3} \quad (2)$$

que en términos de la fórmula de Manning, se transforma en

$$x_c = \frac{8q_c^2}{T_c^2 g \left[ S_o - \frac{gn^2}{u^2 T_c} \left[ \frac{P_c}{A_c} \right]^{1/3} \right]^3} \quad (3)$$

siendo  $A_c = (b+my_c) y_c$  y  $P_c = b+2y_c \sqrt{1+m^2}$ , para canal trapezoidal.

La profundidad crítica se halla resolviendo

$$y_{c\ i+1} = \left[ \frac{Q_c^2}{g} \right]^{1/3} \left[ \frac{b+2my_{c\ i}}{b+my_{c\ i}} \right]^{1/3} \quad (4)$$

o la ecuación equivalente

$$y_{c\ i+1} = \left[ \frac{q_c^2 x_c^2}{g} \right]^{1/3} \left[ \frac{b+2my_{c\ i}}{b+my_{c\ i}} \right]^{1/3} \quad (5)$$

puesto que  $Q_c = q_c \cdot x_c$ .

Como quiera que las Ecuaciones(3)y(5) deben satisfacerse simultáneamente para valores únicos de  $x$  y  $y$ , se impone realizar, durante el cálculo de dichas variables, un doble proceso iterativo.

Con el propósito de obtener el perfil del flujo a partir de la sección crítica, el autor dedujo las siguientes relaciones:

(a) Si se procede aguas arriba:

$$y_{1\ i+1} = \left| (Z_2 + S_o x_1 - h_0) + q_c^2 \left[ \frac{x_1}{g(x_2 + x_1)} \right. \right. \\ \left. \left. (E_2 + E_{1i}) \left[ E_2 \frac{x_2}{x_1} - E_{1i} \right] + t \right] \right| \quad (6)$$

siendo,

$$E = \frac{x}{(b+my)y}, t = 0,5 \left[ \frac{n}{u} \right]^2 (x_2 - x_1) [J_2 + J_1],$$

$$J = \frac{x^2 (b+2y \sqrt{1+m^2})^{4/3}}{[(b+my)y]^{10/3}}$$

$$\Delta y'_1 = y_1 + h_0 - Z_2 - S_o x_1 \quad (7)$$

$$Z_{01} = h_0 - S_o x_1 \quad (8)$$

$$Z_1 = \Delta y'_1 + Z_2 \quad (9)$$

(b) Si es aguas abajo:

$$y_{2\ i+1} = \frac{x_2^2}{x_1 [b+my_{2\ i}]} \left[ \frac{g(x_2 - x_1)}{x_1 [E_{2i} + E_1]} t + E_1 \right]^{-1} \quad (10)$$

para

$$E = \frac{x}{(b+my)y}, t = \frac{1}{q_c^2} \left[ Z_1 + S_o x_2 - h_0 - y_{2i} \right] - 0.5$$

$$\left[ \frac{n}{u} \right]^2 (x_2 - x_1) [J_{2i} + J_1],$$

$$J = \frac{x^2 (b+2y \sqrt{1+m^2})^{4/3}}{[(b+my)y]^{10/3}}$$

$$\Delta y'_2 = Z_1 - y_2 - h_0 + S_o x_2 \quad (11)$$

$$Z_{02} = h_0 - S_o x_2 \quad (12)$$

$$Z_2 = Z_1 - \Delta y'_2 \quad (13)$$

La Figura 4 corresponde al diagrama de flujo del problema, y el Cuadro 1, a un programa para calculadora Casio PB-770.

Como aplicación al tema en cuestión, se presenta el problema propuesto por Hinds<sup>2,3</sup> (1926). La solución, de acuerdo con el programa, aparece en el Cuadro 2, y en el Cuadro 3 figura el resultado obtenido por Ven Te Chow al utilizar un gráfico y el método de ensayo y error.

## Problema

Un vertedero de canal lateral trapezoidal de 400 pies de largo, se diseña para conducir un caudal variable de 40 pies<sup>3</sup>/seg/pié. La sección transversal tiene un ancho en la base de 10 pies y pendientes laterales de 1/2:1. La pendiente longitudinal del canal es 0,1505, y comienza con una elevación de fondo aguas arriba de 73,70 pies. Suponga  $n=0,015$  y calcule el perfil del flujo para el caudal de diseño.

Al correr el programa, la primera parte de la solución, es:

$$x_c = 162,77 \text{ pies}$$

$$y_c = 17,61 \text{ pies}$$

## Programa para calculadora PB-770

```
10 CLS: PRINT "FLUJO ESPAC. VARIADO: Localización sección crítica": CLEAR
```

```
20 PRINT "METRICO/INGLES": AB$:CLS
30 IF AB$= "METRICO" THEN G U=1:GOTO 60
50 G=32.2:U=1.49
60 INPUT "q";Q,"n";N,"S ";S,"b";B M,"h ";H0
65 GOSUB 350:I=10:K1=8*Q^2/G:K (N/U)^2
70 Y=I:T=B+2*M*Y:V=(B+2*Y*S (1+M^2))^4/((B+M*Y)*Y)
80 X=K1/T^2/(S-G*N^2/U^2/T*V^ 3))^3
90 YC=(K1*X^2/8*(B+2*M*Y))^(1/3 (B+M*Y)
100 IF ABS(YC-Y)>1E-3 THEN Y=Y GOTO 90
110 IF ABS(YC-I)>2E-3 THEN I=YC:G TO 70
120 BEEP:CLS:PRINT USING"####. ##";" Xc=";X,"Yc=";Y ;;INPUT"" , J$:CLS:XC=X
130 PRINT"CALCULO DEL PERFIL: primero aguas ARRIBAX1: siga": INPUT"" , J$:CLS
135 PRINT"Para aguas ABAJO, ha-cer: X1=0"
140 X 2 = X : Y 2 = Y : Z 2 = H 0 - S * X + Y : W=X:P=Y:F=Z:Y1=I
150 INPUT "X1";X1:GOSUB 350:IF X1=0 THEN BEEP:BEEP:BEEP:CLS:GOTO 230
160 GOSUB 320:E2=E:J2=J
180 X=X1:Y=Y1:GOSUB 320:E1=E:J1=J
185 XX=K2*(X2-X1)*(J2+J1)
190 YX=ABS(Z2+S*X1-H0+Q^2*(X1/G/ (X2+X1)*(E2+E1)*(E2*X2/X1-E1) +XX))
200 IF ABS(YX-Y1)>.015 THEN Y1=YX: GOTO 180
```

```

210 DY = Y1 + H0 - Z2 - S * X1 : Z1 = DY +
    Z2 : X2 = X1 : Z2 = Z1 : Y2 = Y1
220 BEEP : GOSUB 330 : X2 = X1 : Y2 = Y1 :
    Z2 = Z1 : GOTO 150
230 X1 = W : Y1 = P : Y2 = I : Z1 = F
240 INPUT "X2"; X2 : GOSUB 350
250 X = X1 : Y = Y1 : GOSUB 320 : E1 = E : J1 = J
260 X = X2 : Y = Y2 : GOSUB 320 : E2 = E : J2 = J
270 XX = (Z1 + S * X2 - H0 - Y2) / Q ^ 2 - K2 * (X2 -
    X1) * (J2 + J1)
280 YX = X2 ^ 2 / X1 / (B + M * Y2) * (G *
    (X2 + X1) / X1 / (E2 + E1) * XX + E1) ^ -1
290 IF ABS(YX - Y2) > 1E-3 THEN Y2 = YX :
    GOTO 260
300 DY = Z1 - Y2 - H0 + S * X2 : Z2 = Z1 - DY
310 BEEP : GOSUB 330 : X1 = X2 : Y1 = Y2 :
    Z1 = Z2 : GOTO 240
320 E = X / Y / (B + M * Y) : J = X ^ 2 * (B + 2 * Y * SQR
    (1 + M ^ 2)) ^ (4 / 3) / ((B + M * Y) * Y) ^ (10 /
    3) : RETURN
330 PRINT USING "####.##"; "X ="; X2,
    "Zo="; H0 - S * X2, "Dy="; DY, "Z ="; Z2 :
    INPUT " ", J$
340 PRINT USING "####.##"; "Y ="; Y2 :
    RETURN
350 CLS : PRINT TAB(21); "ESPERE, POR
    FAVOR": RETURN
360 END

```

Cuadro 1. Solución del problema utilizando el programa

x	0	10	25	50	100	<b>162,77</b>	200	250	300	350	400
Z	73,70	72,20	69,94	66,18	58,65	<b>49,20</b>	43,60	36,08	28,55	21,03	13,50
$\Delta y'$	0,23	0,85	2,08	5,10	7,18	<b>0,00</b>	4,56	6,27	6,42	6,54	6,62
Z	82,25	82,02	81,17	79,09	73,99	<b>66,82</b>	62,26	55,98	49,56	43,02	36,40
y	8,55	9,83	11,23	12,92	15,34	<b>17,61</b>	18,66	19,91	21,01	22,00	22,90

Cuadro 2. Solución del problema según método de Ven Te Chow

x	0	10	25	50	100	<b>164,00</b>	200	250	300	350	400
Z	73,70	72,20	69,95	66,20	58,70	<b>49,10</b>	43,70	36,20	28,70	21,20	13,50
$\Delta y'$	0,23	0,87	2,06	5,08	7,27	<b>0,00</b>	4,45	6,22	6,39	6,48	6,92
Z	82,31	82,08	81,21	79,15	74,07	<b>66,80</b>	62,35	56,13	49,74	43,26	36,34
y	8,61	9,88	11,26	12,95	15,37	<b>17,70</b>	18,65	19,93	21,04	22,06	22,84

## Conclusiones

1. No es indispensable elaborar un gráfico con el fin de localizar la sección de control, como tampoco lo es, aplicar el método

de ensayo y error (tanteos) para calcular el perfil del flujo.

2. Al utilizar la calculadora programable, el abscisado se puede modificar a voluntad dentro del proceso de cálculo, algo difícil de hacer si se emplea el computador.
3. Adicionalmente, y de acuerdo con la Ecuación(3), la posición de la sección de control es función:
  - (a) creciente, del factor de rugosidad  $n$  de Manning,
  - (b) decreciente, de la pendiente longitudinal  $S_0$ , del ancho de fondo  $b$  y del talud  $m$  de las paredes.

## Bibliografía

1. Chaudhry, M.H., "Open channel-flow", Prentice Hall, 1993
2. Chow, V.T., "Hidráulica de canales abiertos", McGraw Hill, 1994
3. French, R., "Open-channel Hydraulics", McGraw Hill, 1985
4. Henderson, F.M., "Open channel-flow", McMillan, 1966
5. Subramanya, K., "Flow in Open Channels", McGraw Hill, 1986

prof\_juliomilan@yahoo.com