

## Sedimentación de una esfera en un cilindro vertical con paredes de radio variable

### The sedimentation of a sphere in a vertical cylinder with periodically varying radius

Watson L. Vargas<sup>a</sup>, Lyda M. Pineda<sup>b</sup> y Carlos A. Riaño<sup>c</sup>

Facultad de Ingeniería

Universidad Militar Nueva Granada

Bogotá D.C., Colombia

#### Resumen

El problema de evaluar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido sumergido en un fluido estancado o en flujo es un problema clásico de la mecánica de fluidos. Tiene implicaciones importantes en muchas aplicaciones de ingeniería que involucran flujos multifásicos *e.g.*, sedimentación, flujo de suspensiones, suspensiones coloidales, etc. En este trabajo se estudia experimental y computacionalmente el movimiento de una esfera sólida que se sedimenta bajo la acción de la gravedad en un fluido Newtoniano confinado dentro de un cilindro vertical cuyo radio cambia periódicamente a lo largo de su longitud. Se estudia entonces la respuesta de la esfera a los cambios súbitos de la geometría del recipiente contenedor, el cual debido a efectos hidrodinámicos de pared, induce aceleraciones y desaceleraciones periódicas de la partícula con consecuencias importantes para la fuerza de Basset. Se presentan observaciones experimentales para el caso en el que los cambios en el radio del cilindro tiene lugar abruptamente y para el caso cuando el cambio es gradual. Se comparan dichos resultados con datos de un cilindro con radio uniforme. Los datos experimentales se obtienen para en un rango de número de Reynolds de  $1 \times 10^{-4}$  a 1000, rango en el cual se determinan la velocidad media de sedimentación y el coeficiente de arrastre y se comparan con aproximaciones teóricas y semiempíricas. Igualmente, se comparan las observaciones experimentales con las obtenidas computacionalmente aplicando la ecuación de movimiento propuesta por Maxey y Riley<sup>1</sup>.

Palabras clave: Sedimentación, Fuerza de Basset, Dinámica de partículas

#### Abstract

We study both experimentally and numerically the motion of a solid sphere settling under gravity through a viscous incompressible Newtonian fluid confined within a

---

<sup>a</sup> Profesor Asociado, Facultad de Ingeniería (UMNG). BSc, MSc., Ph.D, Ingeniería Química

Autor correspondiente: wvargas@etb.net.co

<sup>b</sup> Ing. Civil, Joven Investigador COLCIENCIAS

<sup>c</sup> Ing. Civil, Joven Investigador COLCIENCIAS

vertical cylinder whose radius changes periodically along its length. We explore the response of a settling particle to sudden changes in the geometry of the container which due to hydrodynamic wall effects induces periodic accelerations and decelerations of the particle. Experimental observations are presented for the case where the periodic changes in cylinder radius take place abruptly as well as for the case when the change is gradual. The experimental data are obtained for Reynolds numbers of the particle in the range  $1 \times 10^{-4}$  to 1000. A comparison is made by solving the equation of motion of the sphere --Maxey & Riley (1983)-- with and without the history integral term. The experimental observations indicate the relevant role played by the Boussinesq-Basset force which gives a more precise prediction of the particle sedimentation velocity.

Keywords: Sedimentation, Basset force, Particle dynamics

## I. Introducción

Una esfera cayendo en un fluido Newtoniano viscoso es un problema clásico de la dinámica de fluidos, dicho problema es de gran importancia ambiental e industrial y ha sido estudiado extensamente en la literatura. En ausencia de efectos de pared, la ley de Stokes provee una fórmula precisa para relacionar la fuerza de arrastre que experimenta una esfera de radio  $a$  que se sedimenta con velocidad constante a través de un fluido en reposo. La ausencia de efectos de pared está implícita en la expresión de velocidad terminal estimada a partir de la ley de Stokes, dado que la velocidad no muestra dependencia alguna de alguna longitud característica del contenedor. Para una esfera de radio  $a$ , que se sedimenta en un cilindro de radio  $R$ , y con la relación  $a/R \ll 1$ , la velocidad media de sedimentación de acuerdo con la ley de Stokes está dada por

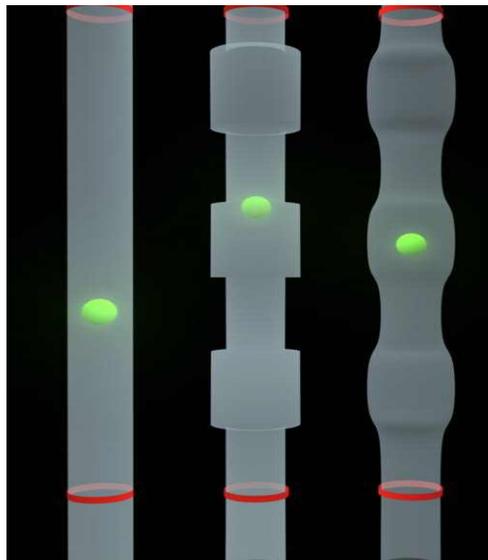
$$V_{st} = \frac{2a^2 g (\rho_s - \rho_f)}{9\mu} \quad (1)$$

donde,  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  corresponden a la densidad del sólido y del fluido respectivamente, y  $g$  corresponde a la aceleración debida a la gravedad. Esta expresión es válida siempre que el número de Reynolds de la partícula  $Re = 2aV_{st}/\nu$  sea muy pequeño. Recientemente, Dorfman *et al.*<sup>2</sup> demostraron teóricamente que en el límite de partículas Brownianas (partículas con diámetros menores a  $\approx 5 \mu\text{m}$ ), la velocidad de sedimentación de una partícula Browniana que se sedimenta a través de un fluido Newtoniano viscoso confinado dentro de un cilindro vertical cuyo radio cambia periódicamente a lo largo de su longitud -y en ausencia de efectos de pared-, la velocidad de sedimentación media de la esfera es siempre menor que el valor predicho por la ley de Stokes (Ec. 1). Este comportamiento inesperado conlleva a preguntarse, ¿cuál sería la respuesta de una partícula no-Browniana que se sedimenta en una geometría similar a la usada en el estudio teórico de Dorfman *et al.*

En general, el experimento de sedimentación de una esfera se ha efectuado en tanques grandes<sup>3</sup> de tal forma que los efectos de pared puedan minimizarse o en tubos cilíndricos<sup>4</sup> de radio constante donde los efectos de pared son importantes. Debido a su simplicidad el experimento de sedimentación es uno de los métodos más simples

de medir la viscosidad de un fluido<sup>4</sup>. El experimento de sedimentación de una partícula puede además usarse para estudiar el comportamiento viscoelástico de soluciones poliméricas y fluidos miscelares<sup>5</sup>.

En este artículo, se presentan observaciones experimentales y computacionales de la sedimentación de una partícula en cilindros verticales cuyo radio cambia periódicamente a lo largo de la longitud (ver Figura 1). Este estudio explora el efecto de los cambios abruptos de la geometría sobre la repuesta de una esfera bajo sedimentación. Dicho efecto debido a fuerzas hidrodinámicas de la pared, induce aceleraciones y desaceleraciones de la partícula; un comportamiento que no ha sido previamente estudiado. Tal efecto de pared puede tener consecuencias importantes sobre la fuerza de Boussinesq-Basset (Integral de memoria) la cual se considera despreciable en todos los cálculos de sedimentación. Notar que en las geometrías que se consideran en este trabajo, la aceleración y desaceleración causada por las paredes se integran en el tiempo a través de la integral de memoria, de tal forma que uno podría preguntarse si esta fuerza afecta de manera significativa la velocidad de sedimentación de una partícula.



**Figura 1.** Esquema del montaje experimental utilizado para la toma de datos. Cilindro 1, radio constante. Cilindro 2, cilindro con cambios periódicos abruptos. Cilindro 3, cilindro con cambios periódicos graduales.

## II. EXPERIMENTAL

Los experimentos se llevan a cabo en cilindros verticales de 50 cm de longitud que contienen el fluido experimental. Las fases continuas usadas incluyen: agua, glicerina y aceite mineral. Las esferas utilizadas son partículas de acero, vidrio, acetato de celulosa y acrílico. Las características principales se muestran en la Tabla I.

**Tabla I.** Características de las esferas usadas en los experimentos

Material	Díámetro [mm]
Vidrio $\rho = 2650 \text{ [kg/m}^3\text{]}$	0.7, 0.8, 1.0, 1.2 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 2.0, 3.8, 10, 19.5
Acetato de celulosa $\rho = 1250 \text{ [kg/m}^3\text{]}$	2.0, 4.0, 5.0
Acrílico $\rho = 1140 \text{ [kg/m}^3\text{]}$	2.0
Acero $\rho = 7500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$	3.175, 4.76

En este trabajo se utilizan tres diferentes geometrías de cilindros verticales. Un cilindro con radio constante (caso clásico), y dos cilindros con cambios periódicos en el radio (ver Figura 1). El diámetro de los tubos es  $2R=2.05$  cm para el cilindro de radio constante,  $2R_1=2.05$  cm y  $2R_2=3.8$  cm para el cilindro con cambios periódicos abruptos,  $2R_1=2.05$  cm y  $2R_{2\text{max}}=3.8$  cm para el cilindro con cambios graduales. Cada uno de los cilindros con cambios periódicos en el radio posee cinco secciones de longitud  $L \approx 8.0$  cm.

En un experimento típico, la esfera se sostiene mediante un par de pinzas las cuales están sumergidas dentro del fluido experimental a una profundidad aproximada de 0.5 cm. La partícula se libera en el tiempo  $t = 0$ , sin velocidad inicial o rotación. La velocidad de sedimentación se determina mediante la medida del tiempo de viaje de la partícula en una longitud efectiva de 43 cm. El tiempo se determina usando un cronómetro digital convencional. Los datos experimentales se determinan para números de Reynolds de la partícula en el rango  $1 \times 10^{-4}$  a 1000. Todos los experimentos se realizan a temperatura ambiente y los fluidos y partículas se usan tal como fueron recibidos. Todos los datos reportados son el resultado de promediar 20 observaciones para cada velocidad de sedimentación. La dispersión típica en las medidas de velocidad de sedimentación determinada mediante la desviación estándar es mejor del 1%.

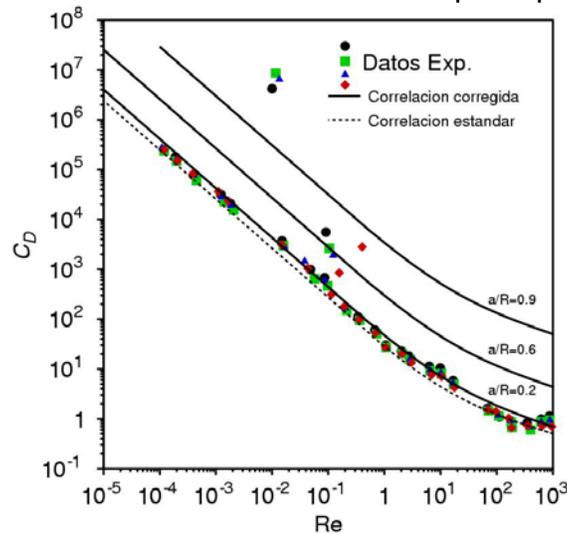
Una vez se ha determinado la velocidad de sedimentación a partir de las observaciones experimentales siguiendo el procedimiento descrito arriba, es posible determinar el coeficiente de arrastre de las partículas mediante la expresión [3],

$$C_{D_0} = \frac{8ag(\rho_p - \rho_f)}{3\bar{V}_p^2 \rho_f} \frac{1}{f(a/R)} \quad (2)$$

donde  $f(a/R)$  es un factor de corrección por el efecto de las paredes laterales. En el cálculo de del número de Reynolds  $Re = 2a\bar{V}_p / \nu$  se utilizan los valores de viscosidad y densidad a condiciones de temperatura ambiente.

La Figura 2 muestra una comparación entre el coeficiente de arrastre  $C_D$  determinado experimentalmente mediante la expresión en la Ecuación 2 y la función de correlación estándar con y sin correcciones por efecto de pared como función del numero de

Reynolds. Los resultados en la Figura 2 muestran un ajuste relativamente satisfactorio para valores de la relación  $a/R < 0.6$ . A medida que los valores de  $a/R$  se hacen mayores de 0.6 los resultados predichos por las correlaciones actualmente en uso muestran una desviación sistemática que se hace aún mayor a medida que  $a/R \rightarrow 1$ . Este resultado es de alguna manera esperado, dado que las correlaciones existentes para corregir por efectos de pared proveen una buena aproximación para valores de  $a/R$  hasta 0.6. Los valores experimentales para valores mayores de 0.6 indican que existen efectos adicionales tales como fuerzas de lubricación, rotación y/o succiones generadas por el desprendimiento de los vórtices en la parte posterior de la partícula.



**Figura 2.** Coeficiente de arrastre  $C_D$  como función del número de Reynolds  $Re$  para las geometrías de la Figura 1.

Notar que la desviación cada vez más pronunciada en la estimación de  $C_D$  a medida que  $a/R \rightarrow 1$ , implica que es necesario desarrollar nuevas correlaciones o corregir las existentes para tener una descripción apropiada del efecto de pared.

### III. MODELAMIENTO

El movimiento de una partícula esférica en un fluido viscoso en reposo puede describirse mediante una versión simplificada de la ecuación de Maxey y Riley[1]

$$(m_p + \frac{1}{2} m_f) \frac{dV_p}{dt} = (m_p - m_f) g - \frac{1}{2} \pi a^2 \rho_f V_p^2 C_D(Re) - \frac{6\pi a^2 \mu}{(\pi V)^{1/2}} \left( \int_0^t \frac{dV_p}{dt} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} \right) \quad (3)$$

donde  $V_p$ , es la velocidad de la partícula,  $t$  es el tiempo,  $m_p$  es la masa de la partícula y  $m_f$  es la masa de fluido desplazado. El origen de los términos en la Ecuación 3 han sido claramente delineados en otras publicaciones y por lo tanto por razones de brevedad se asume que el lector está familiarizado con ellos (ver Ref. [1]). Dado el valor finito de la relación  $a/R$ , el coeficiente de arrastre  $C_D(Re)$  de la esfera, que se aplica en la Ecuación 3 debe ser corregido por los efectos de las paredes laterales del cilindro. El factor de corrección  $f(a/R)$  se incrementa continuamente desde el valor de 1 para valores de  $a/R \rightarrow 0$  (formula clásica de Stokes) y se aproxima a infinito cuando

$a/R \rightarrow 1$ . Para una partícula esférica en ausencia de rotación que se mueve de forma paralela a la pared el incremento en el arrastre puede calcularse a partir de la solución asintótica propuesta por Faxen (1923) válida para  $a/R \rightarrow 0$  (i.e., para partículas que se mueven lejos de las paredes).

$$\frac{C_D}{C_{D0}} = f(a/R) = \left[ 1 - \frac{9}{16} \left( \frac{a}{R} \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{a}{R} \right)^3 - \frac{45}{256} \left( \frac{a}{R} \right)^4 - \frac{1}{16} \left( \frac{a}{R} \right)^5 \right]^{-1} \quad (4)$$

Sin embargo, para la situación que se pretende analizar en este trabajo, la expresión de la Ecuación 4 no es adecuada dado que las partículas se encuentran cercanas a la pared esto es  $a/R \rightarrow 1$ . Se aplica entonces la expresión empírica determinada por Haberman y Sayre [4] para la sedimentación de esferas en tubos.

$$\frac{C_D}{C_{D0}} = f(a/R) = \frac{1 - 0.75857 \left( \frac{a}{R} \right)^5}{1 - 2.1050 \left( \frac{a}{R} \right) + 2.0865 \left( \frac{a}{R} \right)^3 - 1.7068 \left( \frac{a}{R} \right)^5 + 0.72603 \left( \frac{a}{R} \right)^6} \quad (5)$$

Existen en la literatura muchas expresiones que relacionan  $C_{D0}$  y que tienen en cuenta la variación con el número de Reynolds<sup>6</sup>. En este trabajo se utiliza la expresión

$$C_{D0} = \frac{24}{Re} [1 + 0.173 Re^{0.657}] \quad (6)$$

la cual es una correlación (correlación estándar) usada comúnmente para números de Reynolds hasta  $10^3$  y que se compara relativamente bien con las observaciones experimentales con desviaciones usualmente menores al 5%. Para estimar la velocidad de sedimentación usada en el cálculo del número de Reynolds se usó la expresión propuesta por Nguyen *et al.* [7] que relaciona la velocidad de Stokes (Ec.1) a la velocidad de la partícula  $V_p$  con el número de Arquímedes

$Ar = 8a^2(\rho_p - \rho_f)g\rho_f/\nu^2$ . La expresión

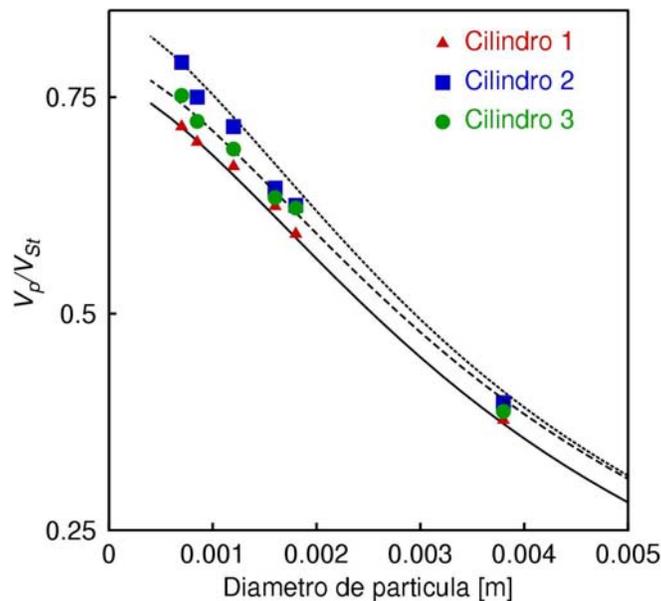
$$\frac{\bar{V}_{St}}{V_p} = 1 + \frac{Ar}{96} [1 + cAr^n]^m \quad (7)$$

se ajustó a los datos experimentales y las constantes  $c$ ,  $n$  y  $m$  se determinaron mediante un método de mínimos cuadrados no lineales. La integración numérica de la Ecuación 3 en conjunto con  $dx/dt$  se efectuó aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden con incremento de tiempo fijo. La expresión en la Ecuación 5 se usa en este trabajo para incorporar el efecto de las paredes laterales. La evaluación de la integral de memoria se efectuó aplicando el esquema propuesto en la Ref.[8]

#### IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

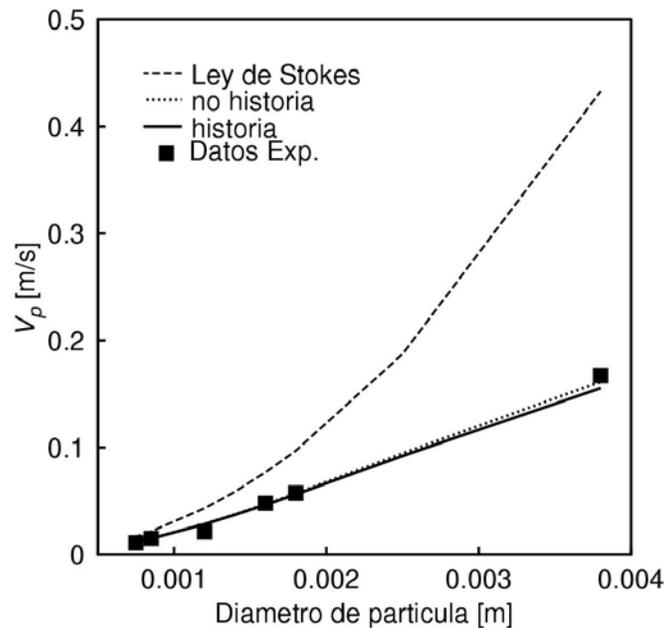
La Figura 3 muestra la comparación entre las observaciones experimentales y las predicciones basadas en la ecuación de Maxey y Riley (Ec. 3). En la Figura 3 se ilustra la velocidad media de sedimentación en las tres geometrías consideradas en este estudio normalizadas por la velocidad de sedimentación predicha mediante la ley de Stokes. Los datos experimentales corresponden a la sedimentación de esferas de vidrio en aceite mineral. En el rango de diámetros de partícula cubierto en este estudio

existe un ajuste razonable entre el modelo y los datos experimentales. Los símbolos indican los datos experimentales en las tres geometrías consideradas. Las líneas indican la solución numérica de la Ecuación 3 incluyendo los efectos de la integral de historia. La línea sólida corresponde al cilindro de radio constante (cilindro 1), las líneas punteadas corresponden a las predicciones para los cilindros con geometría periódica (cilindros 2 y 3), respectivamente. Para los datos experimentales mostrados en la Figura 3 así como para los demás resultados de esta investigación (Datos no mostrados) la velocidad de sedimentación es mayor en el cilindro con cambios periódicos abruptos seguido por el cilindro con cambios graduales. El modelo número predice un comportamiento similar tal y como se muestra en la Figura 3.



**Figura 3.** Comparación de datos experimentales y resultados teóricos de la velocidad de sedimentación normalizada como función del diámetro de partícula.

La importancia de la integral de memoria (fuerza de Boussinesq-Basset) puede evaluarse mediante el cálculo de la velocidad de sedimentación con y sin término de memoria. El resultado de este ejercicio se ilustra en la Figura 4. Los datos muestran que existe un pequeño efecto que se hace más significativo con el tamaño de las partículas. La diferencia relativa en la velocidad de sedimentación con y sin presencia de la fuerza de Basset está en el rango de 0.1-4% para las partículas consideradas en este estudio. Para un estudio más detallado de este y otros aspectos relacionados ver la Ref. [9]



**Figura 4.** Evolución de la velocidad de sedimentación como función del diámetro de partícula con y sin el término de historia en la Ec. 3.

## V. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En este trabajo se ha estudiado el movimiento transiente de una esfera que se sedimenta bajo gravedad en un fluido Newtoniano viscoso contenido en cilindros verticales cuyo radio cambia periódicamente a lo largo de su longitud. Los resultados indican que el movimiento puede describirse de manera razonable con las ecuaciones de Maxey y Riley, aún para partículas cuyo número de Reynolds es relativamente alto. Tanto las simulaciones como los datos experimentales muestran que la aceleración y desaceleración causada por la geometría de las paredes tiene efectos sobre la velocidad de sedimentación. Aún cuando típicamente la sedimentación de partículas se ha efectuado en taques y cilindros con radio constante, la dinámica observada en cilindros cuyo radio cambia periódicamente a lo largo de su longitud es mucho más rica y compleja. El estudio de dichos sistemas requiere por lo tanto estudios adicionales. Simulaciones numéricas así como estudios experimentales adicionales se llevan a cabo actualmente.

### Agradecimientos

Los autores agradecen la colaboración del personal de los laboratorios de Ingeniería Civil de la UMNG por su asistencia con los experimentos. Lyda M. Pineda y Carlos A. Riaño han sido soportados parcialmente por la UMNG y COLCIENCIAS-BID a través del programa de Jóvenes Investigadores. Este trabajo ha sido financiado por la UMNG y COLCIENCIAS a través del proyecto No:1123-05-13702. Algunos de los resultados en este artículo han sido presentados en 2005 APS March meeting poster session C1:00069, Los Ángeles CA.

## Referencias

---

- [1] M. R. Maxey and J. J. Riley, *Physics of Fluids* **26**, 883 (1983).
- [2] K. D. Dorfman, E. Yariv, and H. Brenner, *Physics of Fluids* **15**, 1082 (2003).
- [3] N. Mordant and J.-F. Pinton, *Eur. Phys. J. B* **18**, 343 (2000).
- [4] A. Ambari, B. Gauthier-Manuel, and E. Guyon, *Physics of Fluids* **28**, 1559 (1985).
- [5] A. Jayaraman and A. Belmonte, *Phys. Rev. E* **67**, 065301(R) (2003).
- [6] R. Turton and O. Levenspiel, *Powder Technology* **47**, 83 (1986).
- [7] A. V. Nguyen, H. Stechemesser, G. Zobel, and H. J. Schulze, *Int. J. Miner. Process.* **50**, 53 (1997).
- [8] I. Kim, S. Elghobashi, and W. A. Sirignano, *J. Fluid Mech.* **367**, 221-253 (1997).
- [9] W. L. Vargas, L. M. Pineda, and C. A. Riaño, *Physics of Fluids* (en revisión) (2005).