USO DE LA DESCOMPOSICIÓN TOEPLITZ EN LA ESTRATIFICACIÓN DE MATRICES

USE OF THE TOEPLITZ DECOMPOSITION IN THE STRATIFICATION OF MATRICES

Adrián Ricardo, Gómez Plata

Matemático, M.Sc. Profesor Departamento de Matemáticas, Investigador Grupo Matrix.
Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia. E-mail: adrian.gomez@umng.edu.co

Fecha de recepción: Octubre 4 de 2006

Fecha de aprobación: Febrero 12 de 2007

RESUMEN

Las matrices Normales $\mathcal{N}$ son una subvariedad estratificada en forma de estrella de R^{2n^2} ; se prefiere para propósitos prácticos, tener en forma concreta como es la estratificación de algunas matrices. Se presentará aquí algunos teoremas que permiten decantar una estratificación de las matrices Normales hecha por medio de la descomposición Toeplitz y que conlleva a realizar el cálculo de valores propios usando el método Hermitiano de Lanczos o el método de Arnoldo según Huthanen [4].

PALABRAS CLAVE: matrices normales, subvariedad estratificada, forma de estrella.

ABSTRACT

Normal matrices $\mathcal{N}$ are a submanifold stratified in star shape R^{2n^2} for practical purposes, it is convenient to know the details concerning the stratification of certain matrices. This article displays useful theorems that allow decanting a stratification of normal matrices using Toeplitz decomposition. The procedure will also facilitate the calculation of eigenvectors and eigenvalues using either Arnoldy or Lanczos Hermithian method according to Huthanen [4].

KEY WORDS: Normal matrices, star shape, stratification.

INTRODUCCIÓN

Gómez en [2], ha presentado aspectos topológicos que permiten clarificar porque las matrices normales son un conjunto subanalítico estratificado en forma de estrella, buscando como objetivo entender el trabajo de Huthanen [4].

Realmente no es fácil citar artículos o libros donde se vean conjuntos de matrices como espacios estratificados, debido a que poco o nada hay hecho en el mundo en este estudio, exceptuando el trabajo de Huthanen [4]. Mas sin embargo se puede encontrar libros que facilitan abordar el tema como [1],[5],[6],[7],[8],[9]. Por eso se presenta a continuación un procedimiento que permite decantar una estratificación de las matrices normales partiendo del uso de la topología diferencial y logrando esta estratificación cuando interviene la teoría de matrices.

1. PRELIMINARES

Se citarán algunas propiedades importantes de las matrices en especial de las matrices no degeneradas, las matrices normales y unitarias y una forma restringida del teorema espectral. Horn en [5] y Meyer en [6] presentan un panorama completo de estas propiedades.

1.1. NOTACIÓN

Se toma como referencia el conjunto de las matrices cuadradas de orden n denotadas con M y con entradas en los números complejos C y allí se considera:

$$\text{Matrices Normales} \quad N = \{A \in C^{n \times n}; AA^* = A^*A\} \quad (1)$$

$$\text{Matrices Unitarias} \quad U = \{U \in C^{n \times n}; UU^* = U^*U = I\} \quad (2)$$

$$\text{Matrices Diagonales} \quad D = \{D \in C^{n \times n}; D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)\} \quad (3)$$

$$\text{Matrices Hermitianas} \quad H = \{H \in C^{n \times n}; H^* = H\} \quad (4)$$

$$\text{Matrices anti-hermitianas} \quad S = \{S \in C^{n \times n}; S^* = -S\} \quad (5)$$

$H(K_1, \dots, K_j) \subset H$ denota el conjunto de las matrices hermitianas que tienen exactamente valores propios con multiplicidades $K_1, \dots, K_j$.

$H_n \subset H$ denota el conjunto de matrices hermitianas no degeneradas, es decir, aquellas cuya multiplicidad geométrica es 1.

$N_n \subset N$ denota el conjunto de matrices normales que tienen parte hermitiana no degenerada.

Para $Z \in C^{n \times n}$ se define el centralizador de Z como el conjunto formado por todas las matrices que conmutan con Z , es decir

$$C(Z) = \{B \in C^{n \times n}; BZ = ZB\} \quad (6)$$

Proposición 1. Sea $A \in C^{n \times n}$, entonces $\dim C(A) \geq n$. Además la igualdad se cumple si y solo si A es no degenerada.

Teorema 1. Sea $A \in C^{n \times n}$ una matriz no degenerada. Una matriz $B \in C^{n \times n}$ conmuta con A si y solo si existe un polinomio $p(t)$ de grado a lo sumo $n-1$ tal que $B = p(A)$.

Proposición 2. $A \in C^{n \times n}$ es una matriz no degenerada si y solo si toda matriz que conmuta con A es un polinomio en A .

Teorema 2. (Teorema espectral) Sea $A \in C^{n \times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es normal
2. A es unitariamente diagonalizable, o lo mismo, es unitariamente similar a una matriz diagonal, es decir, existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal Λ tal que $A = U\Lambda U^*$

1.2. VARIEDADES DE MATRICES

Se darán algunas definiciones útiles de variedades para mostrar dos subvariedades de matrices. Para estudiar en mayor detalle las nociones básicas de variedades, ver Baker [1], Spivak [9] o Pollack [8].

1.2.1. Subvariedades.

Definición 1. Sea un espacio topológico de Hausdorff separable.

Si $U \subset M$ y $V \subseteq R^n$ son subconjuntos abiertos, un homeomorfismo $f: U \rightarrow V$ es llamado una n -*carta* para U .

Definición 2. Si $\Omega = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ es un cubrimiento de M y $F = \{f_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha\}$ es una colección de n -*cartas*, entonces F es llamado un *atlas* para M si dado que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (7)$$

es un difeomorfismo.

Definición 3. Un *atlas* es denotado como (M, Ω, F) y se refiere a una *variedad suave de dimensión n* .

Proposición 5. Si M_1 y M_2 son variedades de dimensión n_1 y n_2 , respectivamente, entonces $M_1 \times M_2$ es una variedad de dimensión $n_1 + n_2$. En particular el espacio producto de n círculos unitarios $S^1 \times \dots \times S^1$ (con n factores) es una variedad de dimensión n .

Definición 4. Sea (M, Ω, F) una variedad de dimensión n . Un subconjunto $N \subseteq M$ es una subvariedad de dimensión k si para todo $p \in N$ existe una vecindad abierta $U \subset M$ de p y una n -carta $f: U \rightarrow V$

$$p \in f^{-1}(V \cap R^k) = N \cap U \quad (8)$$

Corolario 1. El subconjunto

$$M = \{(A, b) \in M(R) \times R : b \det A = 1\} \subseteq M(R) \times R \quad (9)$$

es una subvariedad de $M(R) \times R$.

Demostración. Definamos la siguiente función

$$F: M_n(R) \times R \rightarrow R; F(A, b) = b \det A - 1 \quad (10)$$

Esta función es suave y $M = F^{-1}0 \subset M(R) \times R$ es un subconjunto cerrado. La derivada del mapeo $d = d_{(A,b)}$ en un punto $(A, b) \in F^{-1}0$ tiene la forma

$$d(X, v) = (\det A)v + d \det_A(X) \quad (11)$$

donde la identificación natural de $T_{(A,b)}M(R) \times (R) = M(R) \times (R)$ y $T_t(R) = (R)$, para todo $t \in R$. El $\det A \neq 0$ es sobreyectivo. Aquí $M \subseteq R \times R$ es una subvariedad suave de dimensión igual a la $\dim M(R) = n^2$.

Otro ejemplo se encuentra en el conjunto de matrices normales. Una Matriz $N \in M$ se dice que es normal si $NN^* = N^*N$. Ahora una matriz diagonal D se dice que es similar unitariamente a una matriz $N \in N$ si existe una matriz unitaria $U \in M$ tal que

$$D = U^*NU. \quad (12)$$

De donde se tiene $UDU^* = UU^*NUU^*$ es decir que el conjunto de matrices normales se puede ver como

$$N = UDU^* \quad (13)$$

Esto sugiere que el conjunto de matrices normales N sea pueda obtener por medio de la función

$$F: M \times M \rightarrow N \quad (14)$$

$$(U, D) \mapsto UDU^* \quad (15)$$

Esta función es suave y $G = (F^{-1})(UDU^*) \subset M \times M$ es tal que $N \subset M \times M \subseteq R^{2n^2}$ ya que los conjuntos compactos tienen preimágenes compactas.

1.3. ESPACIOS ESTRATIFICADOS

Se definirá qué es un espacio estratificado y se mostrará el conjunto de matrices normales como una subvariedad estratificada. En [7] Pflaum, estudia los espacios estratificados desde una visión analítica y geométrica.

1.3.1. Estratificación de las matrices normales.

Definición 6. Sea W un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto con bases contables. Una estratificación en W es una partición $\sum$ en conjuntos cerrados localmente tal que:

1. Todo $X \in \sum$ es una variedad de dimensión finita con frontera.
2. $\sum$ es finita localmente,
3. Si $X, Y \in \sum$ y $X \cap \tilde{Y} \neq \emptyset$, entonces $X \subseteq \tilde{Y}$.
4. Si $X, Y \in \sum$ y $X \subseteq \tilde{Y}$; con $X \neq Y$ entonces $\dim X < \dim Y$

Los conjuntos de la partición de los elementos de $\sum$ son llamados el estrato. El par $(W, \sum)$ es llamado un espacio estratificado.

Ejemplos. Algunos conjuntos importantes que admiten estratificación son:

1. Variedades con frontera donde $\sum = \{Int(M), \partial M\}$. En particular se puede mencionar las matrices cuadradas M
2. Variedades algebraicas y espacios analíticos en R o C .
3. Conjuntos analíticos y subanalíticos. En particular las matrices normales N son un conjunto subanalítico de las matrices M ya que si se toma el conjunto imagen de la función

$$\begin{aligned} F: M \times M &\rightarrow N \\ (U, D) &\mapsto UDU^* \end{aligned} \quad (16)$$

Por el teorema espectral

$$z \in N \Leftrightarrow Z = UDU^* \quad (17)$$

y de esta manera $N = \text{Im}(F)$, luego F es analítica. Además F es propia (imagen inversa de compactos es compacto) ya que este un espacio métrico la noción de conjunto compacto equivale a que el conjunto sea cerrado y acotado. Para esto sea $B \in N$ compacto y mostremos que $F^{-1}(B)$ es cerrado y acotado:

Dado que F es continua, por ser analítica, y que B es cerrado entonces $F^{-1}(B)$ es cerrado. Por otra parte se tiene que:

$$F^{-1}(B) = \{(U, D) \in U \times D : F(U, D) \in B\} \quad (18)$$

teniendo en cuenta que este es en un espacio métrico de dimensión finita, todas las normas son equivalentes y en particular tenemos que para una constante

$$\|(U, D)\|_{U \times D} \leq K \max_{(U, D) \in F^{-1}(B)} \{\|U\|_F, \|D\|_F\} \quad (19)$$

$$\text{pero} \quad \|U\|_F = (tr(UU^*))^{\frac{1}{2}} = (tr(I))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \quad (20)$$

$$\text{y} \quad \|D\|_F = \|UDU^*\|_F = \|F(U, D)\| \leq k \quad (21)$$

pues B es acotado.

Así $F^{-1}(B)$ es acotado. Luego de lo anterior tenemos que $F^{-1}(B)$ es compacto y de esta manera propia.

Un teorema relacionado con los Conjuntos subanalíticos que admiten estratificación es presentado por Robert.M. Hard [3], dice textualmente:

Teorema 4. For any locally finite family $\mathfrak{v}$ of semianalytic (resp., subanalytic) subsets of a paracompact real analytic manifold M there is a semianalytic stratification of M compatible with $\mathfrak{v}$.

El anterior teorema es conocido como el Teorema de Estratificación y una consecuencia de este es que las matrices Normales son una subvariedad estratificada de R^{2n^2} que sumado con el hecho de que las matrices normales tiene forma de estrella caracteriza estas matrices en un ambiente topológico más claro.

Para propósitos prácticos se hará una construcción de una estratificación de N usando la descomposición Toeplitz para obtener una parametrización del

estrato de dimensión maximal. Para esto sea $Z = H + iK$ y tomemos la descomposición Toeplitz

$$Z = A + iB, \text{ donde } A = \frac{1}{2}(Z + Z^*) \text{ y } B = \frac{1}{2i}(Z - Z^*) \quad (22)$$

Llámesse a H y iK la parte Hermitiana y anti-hermitiana de Z , respectivamente. Sea $C(Z)$ el centralizador de Z , obviamente $C(Z)$ es un subespacio de $C^{n \times n}$.

Lema 1. Tómese que $M \in H$ y que la dimensión de $C(M) \subset C^{n \times n}$ es l . Entonces la dimensión de $S \cap C(M) \subset R^{2n^2}$ es l .

Sea $(k_1, \dots, k_j) \in N^j$ una partición de $n \in N$ tal que, $\sum_{i=1}^j k_i = n$, donde una partición de n , la denotaremos por $H(k_1, \dots, k_j) \in H$.

Proposición 5. $H(k_1, \dots, k_j) \in R^{2n^2}$ es una variedad suave de dimensión $n^2 + \sum_{i=1}^j (1 - k_i^2)$

Proposición 6. Si $H \in H(k_1, \dots, k_j)$ entonces la dimensión de $S \cap C(H) \in R^{2n^2}$ es $\sum_{i=1}^j k_i^2$

Teorema 5. Para todo $1 \leq j \leq n$ el conjunto $N_j \in R^{2n^2}$ es una variedad de dimensión $n^2 + j$.

Demostración. Consideremos $H \in H(k_1, \dots, k_j)$ y definamos

$$N(k_1, \dots, k_j) = \{N = H + iK \in N : H \in H(k_1, \dots, k_j)\} \quad (23)$$

Tómese $N_k = \bigcup N(k_1, \dots, k_j)$ tal que todas sus componentes son disyuntas, es decir sus particiones son distintas ordenando módulos. Consideremos ahora la última componente $N(k_1, \dots, k_j)$. Por la proposición 5, $H(k_1, \dots, k_j)$ es una variedad suave de dimensión $n^2 + \sum_{i=1}^j (1 - k_i^2)$. En la proposición 6 se demostró que para una matriz fija $H \in H(k_1, \dots, k_j)$ la dimensión de es. $S \cap C(H) \in R^{2n^2}$ es $\sum_{i=1}^j k_i^2$. Entonces

$$n^2 + \sum_{i=1}^j (1 - k_i^2) + \sum_{i=1}^j k_i^2 = n^2 + j \quad (24)$$

Si $H = U \Lambda U^* \in H(k_1, \dots, k_j)$ en la proposición 6 se tiene que el centralizador de H se puede ver como

$$U(M_{k_1} \hat{A} \dots \hat{A} M_{k_j} \hat{A} \oplus \hat{A} \dots \hat{A} C)U^* \quad (24)$$

En particular $C(H)$ es independiente de los valores numéricos de los valores propios a lo largo de Λ y necesariamente tiene multiplicidades fijas de tal forma que $\Lambda \in H(k_1, \dots, k_j)$. Además el cómputo de la parte anti-hermitiana como se indica en la descomposición Toeplitz es una operación suave. Así cuando U y Λ son suaves la estructura en (24) mantiene la suavidad.

2. CONCLUSIÓN

Se ha demostrado que las matrices normales se pueden estratificar según el teorema 5 como $N = \bigcup_{j=1}^n N_j$. Queda abierta la posibilidad de estudiar si las matrices simétricas con entradas complejas se pueden estratificar y si lo es, como puede ser dicha estratificación para propósitos prácticos cuando se usan en aplicaciones. En otro trabajo se puede mostrar como se usa la estratificación encontrada en aplicaciones concretas.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] BAKER A. (2001), Matrix Group, An Introduction to Lie Group Theory. Springer Undergraduate Mathematics Series.
- [2] GOMEZ, A. (2005), A Strata of normal matrices. Ciencia e ingeniería Neogranadina, 15:6-11.
- [3] HARD. R.M.(1975), Topological properties of subanalytic sets, Trans. AMS, 211:57-70.
- [4] HUTHANEN.M.(2001) A Stratification of the set of normal matrices, SIAM J, Matrix Anal. Appl. Vol 23, N.2, pp 349-367.
- [5] HORN.R., JOHNSON.C.(1985) Matrix Analysis. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- [6] MEYER.C. (2000), Matrix Análisis and Applied Linear Álgebra. SIAM.
- [7] PFLAUM.M. (2001). Analytic and Geometric Study of stratified spaces. Springer-Verlag Berlin Heidelberg:pg 15-53.
- [8] POLLACK. A, GUILLEMIN. V.(2003), Topología diferencial UNAM.
- [9] SPIVAK. M. (1999), A Comprehensive introduction to Differential Geometry, Vol 1, Houston, Publish or Perish INC.