

PLANIFICACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA UN ROBOT TIPO CON RESTRICCIONES DINÁMICAS

PATH PLANNING FOR A ROBOT WITH KYNEMATIC CONSTRAINS

Leonardo, Solaque Guzmán

Ing. Electrónico, PhD., Profesor asistente, Facultad de Ingeniería, Investigador grupo GAV. Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia, leonardo.solaque@umng.edu.co

Nelson, Muñoz Ceballos

Ing. Electrónico, MSc., Profesor asistente, Facultad de Ingeniería, Investigador grupo ICARO. Politécnico Jaime Isaza Cadavid, Medellín, Colombia, ndminoz@elpoli.edu.co

Paola, Niño Suárez

Ing. Electrónico, PhD., Profesor asociado, Facultad de Ingeniería, Investigador grupo DAVINCI. Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia, asuarez@umng.edu.co

Fecha de recepción: 17septiembre de 2007.

Fecha de aprobación: 16 de junio de 2008.

RESUMEN

Este documento presenta una aproximación a la planificación de caminos óptimos para un sistema con restricciones dinámicas y desplazándose dentro de un espacio libre de obstáculos. Se considera el modelo dinámico del dirigible y un análisis para el planteamiento de modelos simplificados o comúnmente conocidos como modelos de control. Se propone una planificación de la trayectoria desde el punto de vista de la teoría óptima utilizando un modelo de la dinámica de un robot móvil (que se desplaza a velocidad constante y en avance, es decir con restricciones dinámicas) como punto de partida para la primera aproximación a los caminos óptimos. Para el suavizado de las trayectorias del dirigible se proponen dos modelos con relajación en la dinámica de la variable de control y finalmente se presenta una simulación de la comparación de los diferentes resultados.

Palabras claves: modelo, trayectoria, configuración, control óptimo, restricción, dirigible, planificación, robot móvil, espacio de configuración, simulación.

ABSTRACT

In this article we propose a method to find the optimal trajectories of a robot with dynamic constraints. The system acts in a free space and in horizontal plane (2D). A dynamic model description for the airship movement on the 2D plane is presented. This model is used in order to make the kinematic model formulation. The optimal control theory is used to find the optimal trajectory for a kind of robot subject to kinematic constraints on its path curvature and its orientation. Two modified models are considered and with them, better-adapted trajectories to the dynamic constraints are planned. Comparisons and conclusions based on simulations are presented at the end.

Key words: Model, trajectory, configuration, optimal control, constraints, airship, path planning, mobile robot, configuration space, simulation.

INTRODUCCIÓN

Como punto de partida se referencian algunos trabajos orientados a la planificación de trayectorias, enfatizando en los resultados sobre dirigibles. Desde hace muchos años uno de los objetivos de la robótica móvil ha estado enfocado en la determinación de caminos que lleven el robot desde un punto inicial a un punto final. Así, la planificación tiene por objetivo crear algoritmos que permitan calcular caminos que respeten las restricciones dinámicas del sistema.

Antes de la década de los 90, la planificación de caminos se direccionaba a soluciones geométricas sin prestar atención a las limitaciones impuestas por la no holonomía de los sistemas.

Lozano-Pérez [18] trabajó la búsqueda de caminos en términos geométricos e introdujo el concepto de espacio de configuraciones, c. Concepto que define el espacio físico de trabajo del sistema y dentro del cual está localizado por su posición y orientación. En el libro de Latombe [16] se encuentra planteada una síntesis de algoritmos que dan solución a la planificación de caminos en el dominio geométrico.

A finales de la década de los 80 e inicio de los 90, aparecieron métodos aleatorios como : RPP (Random Path Planning) [2], [3] y PPP (Probabilistic Path Planning) [13], [19]. En la misma época se produjo la introducción de las restricciones de los sistemas en el espacio de configuraciones, lo que quiere decir que un camino encontrado no es siempre válido o ejecutable en referencia a los movimientos del robot (no holonomía).

Como llevar un sistema no holonómico de una configuración inicial a una configuración final, no es problema fácil de resolver [17], Dubins [5] realizó un trabajo desde el punto de

vista geométrico, que encuentra los caminos más cortos para el desplazamiento de un sistema en el plano, con limitación en el radio de giro y que se desplaza a velocidad constante. Por su parte Jacobs et al [12], Lamiroux et al [15] y Fliess et al [8] realizaron otros proyectos que consideran robots móviles con restricciones y con velocidad constante, bien sea hacia adelante y/o hacia atrás Walsh et al [22] y Yang et al [23] presentan estudios sobre la planificación para UAV's (Unmanned Aerial Vehicles).

Frente al problema de planificar una trayectoria para un sistema con restricciones dinámicas, se plantea el considerar un robot tipo dirigible, desplazándose en un espacio libre de obstáculos, a velocidad constante y con una altitud preestablecida. Bajo los anteriores supuestos, el problema de planificar la trayectoria para el robot queda planteado de manera parecida al problema de un móvil que se desplaza a velocidad constante y con control de dirección (Dubins). Considerando la teoría desarrollada para la planificación de la trayectoria del robot tipo Dubins [4], se procede a encontrar: un modelo cinemático a partir del modelo complejo del dirigible y que sea suficientemente representativo de su dinámica, un modelo que considere su no holonomía y que permita encontrar las trayectorias con las herramientas desarrolladas para el móvil tipo Dubins.

En la literatura se encuentran varias contribuciones sobre seguimiento de trayectorias o puntos de pasada para dirigibles, Hygounenc [11] muestra una estrategia de control de orientación por realimentación de estado que dirige el sistema en el plano horizontal. En Elfes et al [6] los autores proponen una aproximación llamada 'orientteering': el objetivo del control es definido en términos de los puntos de pasada que se pretenden lograr, en vez de mirar una trayectoria planificada. Rao et al [20] presenta un trabajo similar donde la idea es obtener ψ_{ref} en términos de la desviación con respecto al n^{th} punto de pasada. Cuando la distancia entre el dirigible y el punto de pasada es menor a $20m$, la misión considera n^{th} como una posición lograda y cambia su objetivo al $(n + 1)^{th}$ punto de pasada. En Rives et al [21] los autores presentan una aproximación en la cual se usan señales visuales para realizar las tareas de seguimiento de trayectorias, una filosofía similar se encuentra en Zhang et al [24] donde se guía por visión un blimp. En Azinheira et al [1] los autores proponen dos aproximaciones para guiar un dirigible: una se basa en la teoría de control de $H\alpha$ y la otra en controles clásicos PI. Pocos trabajos están orientados al problema de planificación del camino que debe seguir el dirigible. En Kim et al [14] los autores describen algoritmos dedicados a búsqueda aleatoria, considerando en estos movimientos las restricciones cinemáticas y dinámicas. Hima et al [10] presenta un proyecto sobre caminos cortos para el vuelo en plano horizontal de un dirigible, donde la idea es caracterizar los caminos óptimos tomando en cuenta la dinámica y las limitaciones de los actuadores.

Formulando el problema que se trata en el artículo, se debe encontrar una trayectoria factible, teniendo presentes las restricciones del sistema, tal que lleve el robot desde una configuración inicial (x_i, x_j) a una posición final (x_f, x_j) . Para esto, se considera solamente el caso donde el dirigible se desplaza en el plano horizontal (fase e vuelo crucero) donde

son válidos los modelos reducidos que serán presentados en la sub-sección 1.3: modelos simplificados.

El artículo se encuentra organizado así: en la siguiente sección se presenta el modelo general del dirigible y luego una simplificación para encontrar los modelos de control. La sección 2 se dedica al planteamiento de las trayectorias óptimas, sujetas a restricciones dinámicas y a la señal de control. Los resultados de la simulación se presentan al final del artículo (sección 3), junto con las conclusiones.

1. MODELO DINÁMICO - CINEMÁTICO DEL DIRIGIBLE Y REDUCCIONES CUANDO VUELA EN EL PLANO HORIZONTAL

Los dirigibles forman parte de la familia de los aerostáticos, clasificados como más ligeros que el aire, operan bajo el principio de Arquímedes (llenados con helio). Un dirigible está compuesto por envoltura, alerones y góndola. 1) La envoltura lo caracteriza dentro de los dirigibles de carena blanda, rígida o semirígida; 2) Los alerones se utilizan para la estabilidad aerostática-aerodinámica del dirigible y para desplazarse en el plano longitudinal o lateral; 3) la góndola sirve para embarcar la electrónica de control e instrumentación, los motores propulsores y ayuda a la estabilidad en alabeo del dirigible (figura 1).

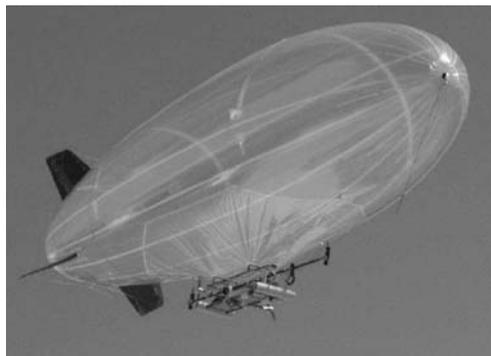


Figura 1. Dirigible, Karma del laboratorio LAAS de Toulouse - Francia.

1.1. EJES COORDENADOS Y CINEMÁTICA

Para la descripción del movimiento del dirigible en el espacio es necesario tener en cuenta tres sistemas coordenados (figura 2): R_o sistema coordenado global, fijo a la tierra; R_d sistema coordenado local, fijo al dirigible; y R_a sistema coordenado aerodinámico.

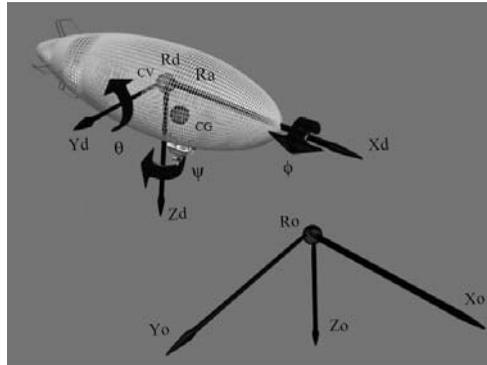


Figura 2. Ejes coordenados del dirigible

1.2. MODELO DINÁMICO

El modelo matemático del dirigible tiene en cuenta las siguientes hipótesis:

- El dirigible es considerado como un sólido.
- El dirigible se supone de masa constante.
- El punto de sumatorias de fuerzas se considera en el centro de volumen (**CV**), que al mismo tiempo es donde se presenta la fuerza de empuje (Arquímedes).
- Los fenómenos de masas adicionadas por el movimiento del dirigible dentro de un fluido son despreciables.
- La tierra es considerada plana en la región de vuelo y el viento nulo.

La ecuación que relaciona las fuerzas externas, la dinámica del dirigible y los comportamientos aerodinámicos se puede escribir como:

$$M_d \dot{V}_d = -T_d(V_d) - T_a(V_a) - g_a + T_p \quad (1)$$

Donde:

- $V_d = [u, v, w, p, q, r]^T$, es el vector de estado que contiene las velocidades lineales en u_x , v_y y w_z , y las velocidades rotacionales P_x , q_y y r_z , expresadas en el eje coordenado del dirigible (R_d) y referenciadas a el eje coordenado global (R_o).
- M_d es la matriz simétrica de masas e inercias.
- T_d es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, con relaciones no lineales con las variables de estado.
- g_a es el vector asociado al peso del dirigible y la fuerza de empuje de Arquímedes debida al helio.
- T_p es el vector de la propulsión, asociado al empuje que desarrollan las hélices.
- T_a es el vector que relaciona todos los fenómenos aerodinámicos. Dentro de éste se

encuentran los aportes de los alerones y fricciones debidas al desplazamiento del sistema dentro de un fluido. Los coeficientes de este vector pueden ser caracterizados a partir de pruebas en túneles de viento o con identificadores paramétricos no lineales como el filtro de Kalman.

$$T_a(v_A) = Av_A^* - D_1(v_2)v_A + T_{sta}(v_a^2) \quad (2)$$

Donde:

- Av_A^* representa fenómenos no estacionarios,
- $D_1(v_2)$ representa los fenómenos de acoplamiento no lineales entre la translación-rotación y la rotación-rotación,
- T_{sta} representa los esfuerzos debidos a los alerones y la geometría del sistema.

1.3. MODELOS SIMPLIFICADOS

En función de obtener modelos de control para el diseño de los reguladores según la estrategia de navegación planteada (figura 3), se realizan reducciones al modelo dinámico cuando el dirigible se desplaza en la fase de vuelo crucero, el detalle de estas ecuaciones se sale del objetivo de este trabajo. Asumiendo velocidad del viento nula y acciones sobre los alerones (actuadores δ_e y δ_g) de cero, un modelo para la velocidad en función de la fuerza de los propulsores (F_m) es:

$$\dot{u} = \frac{1}{(m - a_{11})} (F_m \cos \mu + \frac{1}{2} \rho V_a^2 S_{ref} C_T) \quad (3)$$

Con una velocidad establecida, se controla ahora la altitud en función de la deflexión de los alerones δ_e , dejando $\delta_g = 0$. El modelo para la altitud puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -u \sin \theta \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{q} &= k_{2|\delta_e} q + k_{1|\delta_e} \theta + k_{3|\delta_e} \delta_e \end{aligned} \quad (4)$$

Donde los coeficientes $k_{2|\delta_e}$, $k_{3|\delta_e}$, $k_{1|\delta_e}$, son coeficientes asociados a los parámetros geométricos y medidas en el túnel de viento de parámetros aerodinámicos.

Establecida la velocidad y la altitud, se busca ahora controlar la dirección del dirigible en función de δ_g , las ecuaciones que relacionan la posición-orientación del dirigible en el plano $2D$ y el control δ_g son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u \cos \psi \\
 \dot{y} &= u \sin \psi \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= k_{2|\delta_g} r + k_{1|\delta_g} \delta_g
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Donde $k_{2|\delta_g}$ y $k_{1|\delta_g}$ se determinan igual como se describe en la ecuación (4). Esta reducción se realiza para sistemas de estructura triangular. En Fossard et al [9] se presenta una aplicación sobre la reducción de un aeroplano.

En la figura 3 se presenta una propuesta para el control del dirigible que se basa en el principio de dinámicas desacopladas, útil cuando se requiere mantener el dirigible en la fase de vuelo crucero a una velocidad y altitud de desplazamiento constante y con una dirección definida en el plano $2D$, según la misión. Se puede observar que en primera instancia se tienen reguladores de bajo nivel que aseguran el seguimiento de señales referencia para velocidad, altitud y dirección. Una segunda capa dedicada a la planificación y seguimiento de la trayectoria se encarga de asegurar el desplazamiento del dirigible en el plano lateral según lo requiera el supervisor. La última capa es dedicada a labores multi-tareas o a aplicaciones de interacción con otros robots.

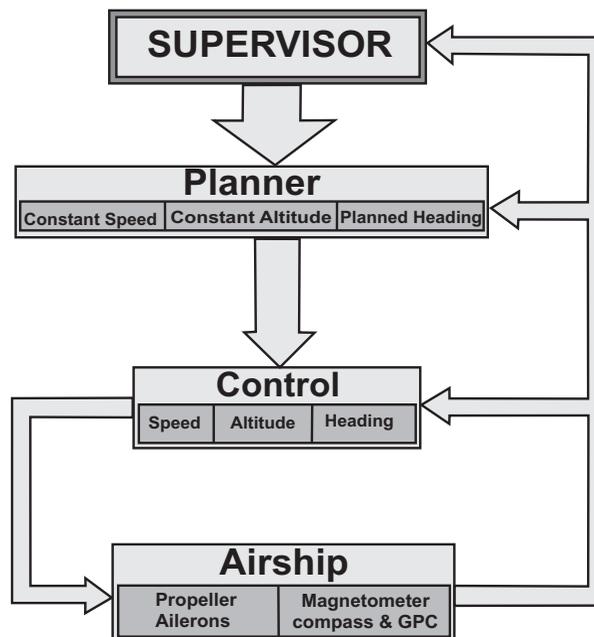


Figura 3. Esquema representativo de la estrategia de control.

2. PLANIFICACIÓN DE LA TRAYECTORIA PARA UN SISTEMA NO HOLONÓMICO

La presente sección se dedica a mostrar cómo planificar la trayectoria del sistema, necesaria para la segunda capa, tal como se mostró en la sección anterior.

2.1. SOLUCIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL CONTROL ÓPTIMO

Si la dinámica del dirigible en el plano horizontal es establecida a u_{ref} y z_{ref} , considerando que el ángulo de deslizamiento es despreciable y el control actúa sobre ψ , el modelo que presenta la ecuación (5) puede ser re-escrito como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u \cos \psi \\ \dot{y} &= u \sin \psi \\ \dot{\psi} &= \delta_g / \rho\end{aligned} \quad (6)$$

Donde δ_g es el control de deflexión de los alerones para la navegación en el plano $2D$. Este modelo presenta 2 restricciones cinemáticas: la primera consiste en que el vehículo debe desplazarse en la dirección de la fuerza tangencial al principal eje x_d y la segunda restricción es la limitación del radio de giro ρ debido a la limitación en la deflexión de los alerones. Esta clase de cinemática fue estudiada por Dubins [8], quien consideró el problema de caracterización de caminos cortos para una partícula en movimiento hacia adelante y con velocidad constante. Walsh et al [22], presenta el mismo sistema y provee soluciones óptimas mediante la teoría de control óptimo y con ayuda de conceptos de geometría, estas teorías son complementarias. La solución proporcionada por el control óptimo por si sola no es total, esto hace que se acuda a la geometría, de tal manera que se pueda completar la solución y se encuentren seis tipos de curvas. El problema de caminos cortos cuando el sistema se desplaza a velocidad constante cae en el mismo caso de caminos óptimos en tiempo.

La primera pregunta que surge ahora se relaciona con la comandabilidad del sistema. Para responder a esta pregunta, nos apoyamos en la teoría de campos vectoriales y el álgebra de 'Lie'. Re-escribiendo la ecuación (6) como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos(\psi) \\ u \sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \delta_g \quad (7)$$

Se observa que tiene la forma general $X^* = F(x, \delta_g) = f(x) + g(x)\delta_g$. Con los vectores f y g se genera,

$$\mathcal{L}(f, g) = \begin{pmatrix} -u \sin(\psi) \\ u \cos(\psi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

y se encuentra que el sistema es controlable

$$\det \begin{vmatrix} u \cos(\psi) & 0 & -\sin(\psi) \\ u \sin(\psi) & 0 & \cos(\psi) \\ 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (9)$$

Siendo el sistema controlable, se garantiza la existencia de una señal de control que lleve el sistema de una configuración inicial (x_i, y_i, ψ_i) a una configuración meta (x_f, y_f, ψ_f) .

El problema de llevar el sistema (6) de una configuración inicial $\zeta_i(x)$ a una configuración final $\zeta_f(x)$ (problema de generación de trayectoria), puede ser formulado como la minimización de $J(\delta_g)$:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t, u), u(t)) dt \quad (10)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x)u + g(x)\delta_g \\ x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \\ u_{min} &\leq \delta_g \leq u_{max} \end{aligned}$$

La solución que se plantea a continuación, permite encontrar la señal de control que minimice el tiempo y la distancia para alcanzar la posición deseada. Si consideramos que el sistema de la ecuación (6), puede ser re-escrito como:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r g_i(x)u_i \quad (11)$$

y las funciones $g_1 \dots g_r$ localmente lipschitzianas, entonces el conjunto de controles U es convexo. Si existe una trayectoria que transfiera el sistema desde un punto cualquiera a otro, se dice que existe una trayectoria óptima en tiempo. El inconveniente de aplicar este criterio directamente sobre el modelo es que éste es un sistema no convexo.

Para encontrar una posible solución, se acude al principio de Pontryagin. Este principio entrega una condición local necesaria de optimalidad para las trayectorias que son solución del sistema dinámico. En ningún caso asegura la existencia de una solución óptima. Para la determinación de esta optimalidad, es necesario considerar en conjunto Pontryagin y el criterio nombrado en el párrafo anterior. Este planteamiento proporcionando soluciones múltiples y cíclicas (en función de senos y cosenos).

Para que la ley de control $u(t)$ y la trayectoria $x(t, u)$ sean óptimas en tiempo, se necesita que exista un vector adjunto no trivial $\lambda(t) = \{\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t)\}$ continuo. Planteando el Hamiltoniano para el sistema de la ecuación (6):

$$H = \lambda_1 u \cos \psi + \lambda_2 u \sin \psi + \lambda_3 \delta_g$$

y maximizando (12), se encuentra una ley de control $u(t)$ que satisface el principio de Pontryagin y en ese caso, se tendrá el control extremo (para una profundización en la solución de esta ecuación, se recomienda al lector consultar a Bui et al [4]).

En la aplicación de esta teoría, existen varias soluciones. Se debe entrar a analizar la función de conmutación para el análisis de las trayectorias encontradas y considerando la dificultad que existe a nivel matemático de las ecuaciones resultantes, se acude a la ayuda de la geometría.

Debido a que existen soluciones múltiples o cíclicas, se debe acudir a la contribución geométrica, de manera que se permita limitar la región de búsqueda en el espacio de configuración y de esta forma encontrar soluciones o curvas únicas.

Tomando en cuenta las condiciones óptimas encontradas (control óptimo de tipo bang-zero-bang) y llevándolas a un análisis geométrico del problema, se encuentran 6 clases de curvas óptimas formadas por líneas rectas y líneas curvas. Siguiendo la notación: línea curva (C), línea recta (S), giro a derecha (R), giro a izquierda (L), y los subíndices de longitud de línea curva u, v, w y línea recta s , las curvas son:

- Familia $C_u C_v C_w$ tiene 2 tipos: $LR_v L$ y $RL_v R$, donde: $v \in]\pi, 2\pi]$, $u, w \in [0, v]$, y $0 \leq u < v - \pi$ o $0 \leq w < v - \pi$
- Familia $C_v C_s C_u$ tiene 4 tipos: $C_L S C_L$, $C_R S C_R$, donde: $u, v \in [0, 2\pi]$ y $u + v \leq 2\pi$, y $C_R S C_L$, $C_L S C_R$, donde: $u, v \in [0, 2\pi[$.

Por ejemplo, para las curvas de tipo $L_v S_s L_u$, se avanza en una línea de curva desde el punto de partida hasta el punto intermedio 1 (control saturado tipo 'bang'), donde se conmuta de curva. Las ecuaciones que relacionan este primer desplazamiento son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \sin v \\ y_1 &= \rho - \rho \cos v \end{aligned} \quad (13)$$

Luego, el sistema se desplaza desde la posición intermedia 1, hasta la posición intermedia 2 en línea recta (control cero tipo 'zero'). Las ecuaciones que relacionan este desplazamiento son:

$$\begin{aligned} x_2 &= \rho \sin v + s \cos v \\ y_2 &= \rho - \rho \cos v + s \sin v \end{aligned} \quad (14)$$

El último trayecto se realiza sobre una línea curva, saliendo desde la posición intermedia 2 y llegando a la posición meta (control saturado tipo 'bang'). Las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} x_f &= \rho \sin v + s \cos v + \rho \sin \psi - \rho \sin v \\ y_f &= \rho - \rho \cos v + s \sin v + \rho \cos v - \rho \cos \psi \end{aligned} \quad (15)$$

Simplificando estas ecuaciones, se encuentra un sistema de fácil evaluación.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \rho \sin \psi + s \cos v \\ \Delta y &= \rho + s \sin v - \rho \cos \psi \end{aligned} \quad (16)$$

con $v \in [0, \psi]$ y $s \in \mathbb{R}^+$

De manera similar se procede a encontrar las ecuaciones que solucionen el sistema para los otros tipos de curvas.

Debido a que el dirigible se desplaza a velocidad constante, no se puede hacer seguimiento de objetivos o, como se encuentra en la literatura, persecución de un móvil virtual. Por el contrario, se puede encontrar el camino óptimo, encontrar la trayectoria en función de la velocidad de desplazamiento y del tiempo de muestreo al que funcione el sistema y hacer su seguimiento.

Una vez calculada la trayectoria, se realiza la discretización de ella en función de la velocidad de desplazamiento del dirigible $5m/s$ y el tiempo de muestreo del sistema $0.1s$. La figura 3, muestra la trayectoria resultante de la planificación de un giro completo, saliendo de una configuración inicial $(10,0,0)$, pasando por diferentes configuraciones

(110,110,-90), (110, -110,180), (-110, -110,90), (-110, 110,0), y llegando a la configuración final (-10,0,0).

Esta aproximación presenta un control discontinuo δ_g a lo largo de la evolución de sistema ($\delta_g \approx$ velocidad angular ψ). En la búsqueda de alisar esta señal, se considera la velocidad angular r como una variable de estado. Dos extensiones al modelo son planteadas a continuación.

2.2. PRIMERA EXTENSIÓN DINÁMICA

Si la variación de la velocidad angular r^* es directamente controlada por δ_g , el nuevo sistema se observa en la figura 4.

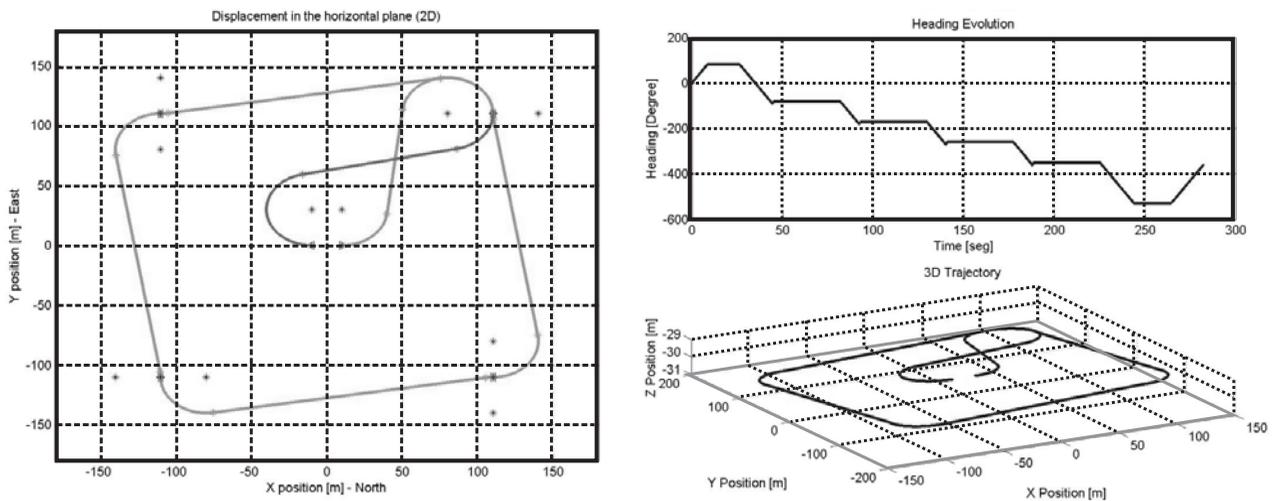


Figura 4. Trayectoria de un vuelo completo

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= u \cos \psi \\
 \dot{y} &= u \sin \psi \\
 \dot{\psi} &= r \\
 \dot{r} &= \delta_g
 \end{aligned} \tag{17}$$

Asumiendo que el sistema (17) es controlable¹ y considerando que la función de costo es para minimizar la energía de la señal de control (similar al problema de planificación de caminos óptimos cuando la velocidad se mantiene constante) se tiene:

¹ La controlabilidad de estos sistemas es demostrable por el álgebra de Lee y se sale de los objetivos de este artículo.

$$J(\delta_g) = \int_{t_0}^{t_f} \langle \delta_g(t), \delta_g(t) \rangle dt \quad (18)$$

un control óptimo δ_g^* puede ser encontrado si existe una entrada $\delta_g(t)$ para cada $t \in [0, T]$ que minimice la función de costo J . El hamiltoniano para este sistema es

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + \delta_g^2) + \lambda_1 u \cos \psi + \lambda_2 u \sin \psi + \lambda_3 ur + \lambda_4 \delta_g$$

2.3. SEGUNDA EXTENSIÓN DINÁMICA

Si la variación de de la velocidad angular r^* es directamente controlada por $-k_r r + \delta_g$ (similar al comportamiento de un sistema de primer orden), el sistema puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \psi \\ \dot{y} &= u \sin \psi \\ \dot{\psi} &= r \\ \dot{r} &= -k_r r + \delta_g \end{aligned} \quad (19)$$

Similar al sistema anterior, existe un control óptimo δ_g^* que lleve el sistema (16) de un punto inicial, a un punto final. El hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + \delta_g^2) + \lambda_1 u \cos \psi + \lambda_2 u \sin \psi + \lambda_3 ur + \lambda_4 (\delta_g + u k_r r)$$

Esta clase de sistemas se clasifican en problemas no convexos que en general son difíciles de solucionar. Una posibilidad para solucionarlos es usando métodos numéricos: La técnica usada y que rápidamente se describe a continuación fue desarrollada por Fernández et al. [7].

El método de Fernández: Si se considera un control de entrada $\delta_g \in L_2([0, T])$ y definiendo $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ como una base ortonormal para $L_2([0, T])^2$, la ley de control continua δ_g puede ser expresada como:

$$\delta_g = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k e_k^{i \frac{2k\pi t}{T}} + \beta_k e_k^{-i \frac{2k\pi t}{T}}) \quad (20)$$

² L_2 representa un espacio de Hilbert.

y con la aproximación de Ritz³, la función δ_g puede ser aproximada por una serie truncada a un límite N . La nueva ley de control y la función objetivo son:

$$\delta_g = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k \quad (21)$$

$$J(\delta_g) = \int_{t_0}^{t_f} \langle \delta_g(t), \delta_g(t) \rangle dt \simeq \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2$$

Donde $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in R^N$. La configuración $\xi_f(x) = x(T)$ es la solución en el tiempo T aplicando el control δ_g . Para hacer que el sistema alcance la meta, un término debe ser adicionado a la función de costo.

$$J(\alpha) = \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 + \gamma \|f(\alpha) - q_f\|^2 \quad (22)$$

Donde $\xi_f = f(\alpha)$ y q_f son la posición meta. Note que el nuevo problema de dimensión finita converge a la solución exacta cuando $N \rightarrow \infty$, consultar a Zhang et al [24].

3. VALIDACIÓN Y SIMULACIÓN

Codificando los algoritmos descritos antes en Matlab y considerando una configuración inicial y una final, se tienen las siguientes trayectorias parametrizadas en función de la velocidad de desplazamiento $6m$ y el tiempo de muestreo $0.1s$ del sistema.

Considerando los modelos (6), (14) y (16), se realizó la planificación de la trayectoria que debe seguir el dirigible cuando parte de la configuración inicial $[0,0,0]$ y llega a la configuración final $[250,250,0]$. En la figura 5 se muestran los resultados logrados, donde la imagen superior presenta la evolución de la posición, la intermedia señala la evolución de la dirección en el plano $2D$ (ψ) y la curva inferior muestra el comportamiento de la velocidad angular en el momento del giro según la trayectoria calculada para el desplazamiento del dirigible entre las dos configuraciones dadas.

Si se considera como punto de partida $\xi_{i=}$ $[0,0,0]$ y punto de llegada $\xi_{f=}$ $[250,-50,-90]$, las trayectorias planificadas se presentan en la figura 6, donde de igual manera como se planteó en la figura 5, la imagen superior presenta la evolución de la posición, la intermedia presenta la evolución de la dirección y la curva inferior presenta el comportamiento de la velocidad angular del dirigible.

¹ La aproximación de Ritz consiste en hacer la solución usando una aproximación de dimensión finita.

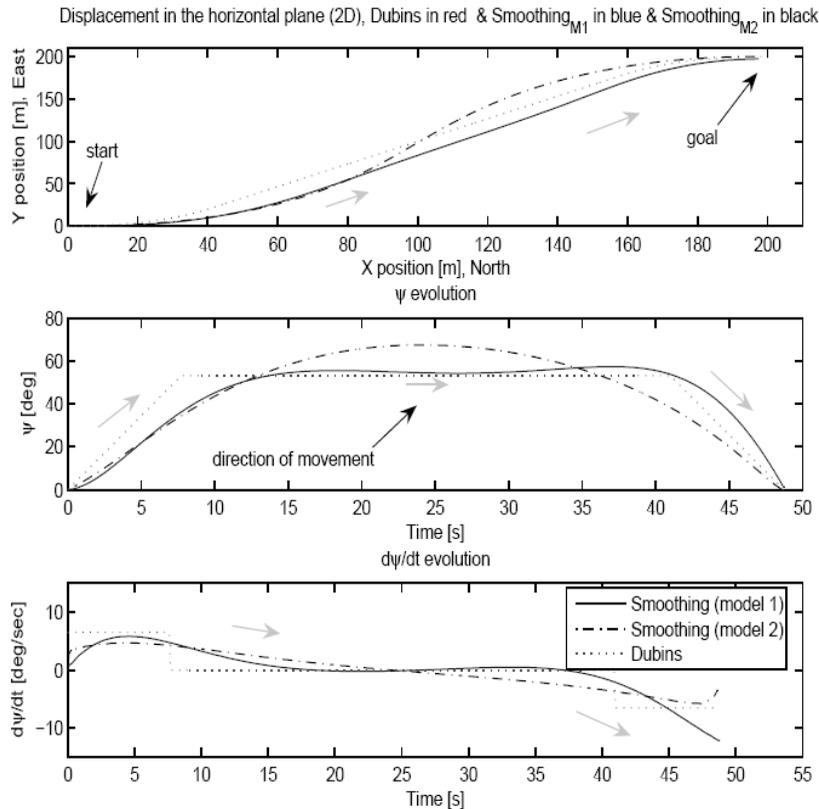


Figura 5. Trayectoria de vuelo para el dirigible, $\xi_i = [0,0,0]$ y $\xi_f = [250,250,0]$

Otro ejemplo de una misión completa se tiene al considerar $\xi_i = [0,0,0]$ y $\xi_f = [-100,500,180]$, tomando como configuraciones intermedias $\xi_1 = [250,-50,-90]$, $\xi_2 = [200,-300,180]$, $\xi_3 = [-100,-250,-270]$, $\xi_4 = [-100,-100,90]$, $\xi_5 = [-50,200,0]$, $\xi_6 = [250,250,-270]$, $\xi_7 = [200,500,-180]$, las trayectorias calculadas para el dirigible según los tres modelos (sin inercia y con inercia en la señal de control), se muestran en las figuras 6 y 7, donde las curvas presentan la evolución en el plano 2D. Una pregunta que puede surgir al ver las gráficas, se centra en las señales de control, pero para dar respuesta a esto se debe ver el esquema de la figura 3, donde se observa que lo importante de la planificación es encontrar la señal de referencia para lograr el seguimiento de la trayectoria y los puntos en donde debe estar el sistema y no la señal de control. Sin embargo, es interesante saber que el primer modelo produce discontinuidades en la señal de control, lo cual se mejora con la expansión de los modelos, permitiendo tener señales más continuas y propias para los actuadores. Este problema es tratado desde el control óptimo, donde se crean señales bang-zero-bang, que se traducen a decir máximo positivo del actuador, cero en el actuador y máximo negativo en el actuador.

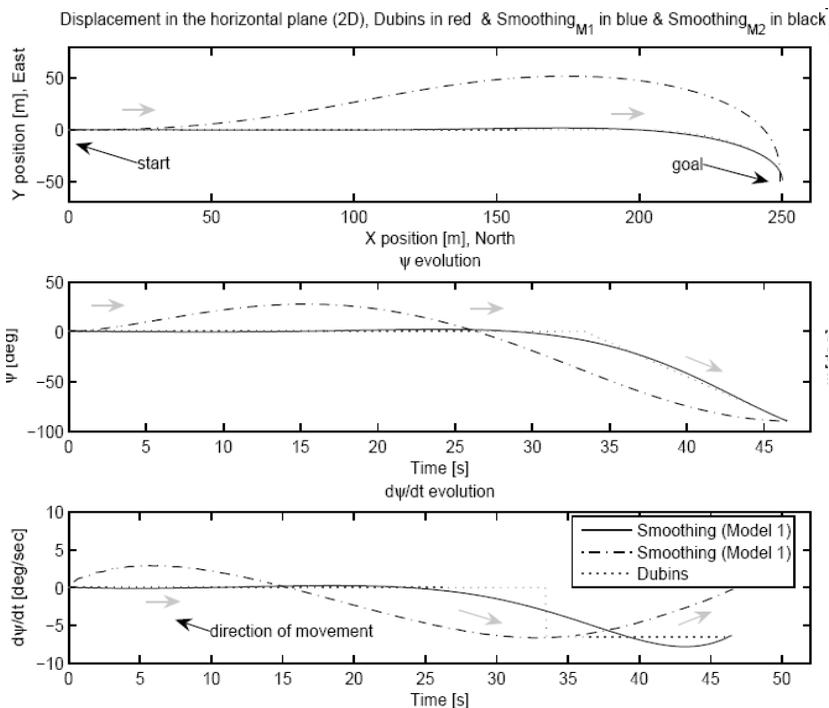


Figura 6. Trayectoria de vuelo para el dirigible, $\xi_i = [0,0,0]$ y $\xi_f = [250,-50,-90]$

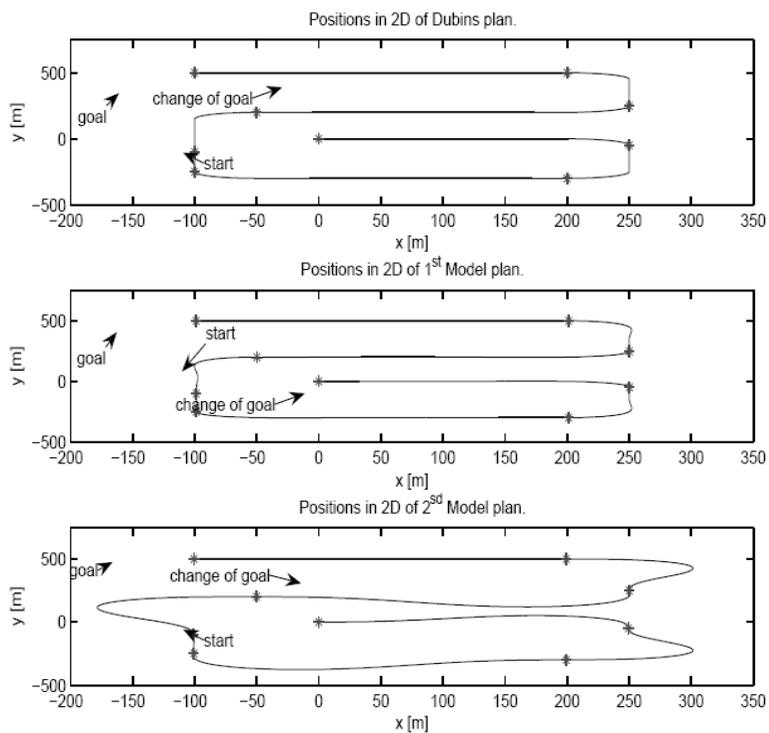


Figura 7. Trayectoria de vuelo para el dirigible, $\xi_i = [0,0,0]$ y $\xi_f = [250,-50,-90]$

4. CONCLUSIONES

Un análisis sobre el comportamiento y el modelo dinámico planteado por la ecuación (1) del dirigible, permitió encontrar un modelo suficientemente representativo de la dinámica del dirigible en la fase de vuelo crucero. Bajo las hipótesis mencionadas en la sección dos, el modelo es válido durante el desplazamiento del dirigible en el plano horizontal y con una limitación en los radios de giros. Así, los deslizamientos serán mínimos durante los giros del dirigible y se respetarán las condiciones de vuelo de esta fase.

Se demostró que el modelo reducido cae sobre la misma expresión que el problema de Dubins [5]. Siendo este un problema largamente tratado por la robótica móvil, se procedió a utilizar la teoría y herramientas desarrolladas para un carro que se desplaza hacia adelante con velocidad constante.

El control óptimo y la interpretación geométrica permiten la determinación de las condiciones necesarias para encontrar el camino óptimo en tiempo y en distancia. Estos resultados muestran que el llevar al límite o a cero las acciones de los actuadores de los alerones, se logra desplazar el robot por líneas curvas de radio constante o líneas rectas, y por tanto, el desplazamiento en el trayecto más corto hasta la posición meta, consumiendo el mínimo de tiempo para esta labor.

Aunque no se muestran en detalle, las funciones de conmutación que resultan de aplicar la teoría de control óptimo, permiten encontrar los momentos en que se debe cambiar la acción de control que hace que el sistema se desplace sobre una línea recta o curva de manera óptima. Esto es lo que se conoce en un control óptimo como un regulador de tipo bang-zero-bang.

El modelo simplificado para la dinámica de la altitud permite considerar inicialmente una solución óptima para encontrar los caminos óptimos para el dirigible, presentando señales de control discontinuas y de difícil implementación en estructuras reales (si se dispone a controlar directamente el actuador), puesto que producen aceleraciones infinitas. Por esta razón, dos modelos con dinámica relajada permiten abordar este problema, permitiendo encontrar trayectorias con aceleraciones limitadas.

Para el sistema y según la estrategia de control establecida, la señal de control hallada no es importante. La señal de evolución de la dirección ψ es más interesante para la estrategia, según lo presenta el esquema de la figura 3 (la capa de "planner"), pues solo envía la señal ψ como referencia, sin embargo, esta trayectoria no considera inercias en la dinámica del sistema, pero sirve como punto de partida para encontrar trayectorias más suaves. Las dos extensiones propuestas al modelo permiten encontrar trayectorias más apropiadas a la dinámica del dirigible.

Queda pendiente dentro de este trabajo cerrar el lazo de control y encontrar la ley de control en función de la posición y orientación deseadas, según la trayectoria encontrada. Esto hará que el desplazamiento del dirigible se haga sobre una trayectoria óptima y robusta a perturbaciones externas, tales como el viento.

Queda abierta la posibilidad a las pruebas experimentales sobre plataformas reales, labor que se espera atacar en trabajos futuros.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] AZINHEIRA, J.R.; CARNEIRO DE PAIVA, E.; RAMOS, J.Jr.G.; BUENO, S.S.; Mission path following for an autonomous unmanned airship, IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, April, 2000.
- [2] BARRAQUAND and LATOMBE, J.; Robot motion planning: a distributed representation approach, IEEE International Journal of Robotics Research, vol. 10, no. 6, 1991.
- [3] BARRAQUAND; KAVRAKI, L.; LATOMBE, J.; LI, T.Y.; MOTWANI, R. and RAGHAVAN, P.; A random sampling scheme for path planning, International symposium on Robotics Research, G. Giralt and G. Hirzinger Eds. Springer-Verlag, 1996.
- [4] BUI, X.N.; SOUERES, P.; BOISSONNAT, J.D. and LAUMOND, J.P.; The shortest path synthesis for non-holonomic robots moving forwards, INRIA, Rapport de Recherche No. 2153, 1994.
- [5] DUBINS, L.E.; On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal position and tangents, American Journal of Mathematics, vol. 79, Pag. 497-516.
- [6] ELFES, A.; MONTGOMERY, J.F.; HALL, J.L.; JOSHI, S.; PAYNE, J. and BERGH, C.F.; Autonomous flight control for a TITAN exploration AEROBOT, [http://www.robotics.jpl.nasa.gov/publications/James_Montgomery/2005_ISAIRAS_Autonomous FlightControlAerobot.pdf](http://www.robotics.jpl.nasa.gov/publications/James_Montgomery/2005_ISAIRAS_Autonomous_FlightControlAerobot.pdf).
- [7] FERNÁNDES, C.; GURVITS, L. and LI, Z.; Near-optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 39, no. 6, Pag. 450-463, Mar 1994.
- [8] FLIESS, M.; LEVINE, J.; MARTIN, P. and ROUCHON, P.; Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples, International Journal of Control, vol. 61, no. 6, Pag. 1327-1361, 1995.

- [9] FOSSARD, A.J. and NORMAND-CYROT, D.; Systemes non linèaries, Copyright Instrument society of America, North Carolina, v. 3, 1993.
- [10] HIMA, S. and BESTAOUI, Y.; Time-optimal path for lateral navigation of an autonomous underactuated airship, American Institute of Aeronautics and Astronomics, August, 2003.
- [11] HYGOUNENC, E. and SUERES, P.; Lateral path following GPS-based control of a small-size unmanned blimp, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Taipei (Taiwan), September 2003.
- [12] JACOBS, P.; REGE, A. and LAUMOND, J.P.; Planning Smooth paths for mobile robots, International conference on robotics and automation, 1989.
- [13] KAVRAKI, L. and LATOMBE, J.; Ramdomized preprocessing of configuration space for fast path planing, IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, C.A. Pag. 2138-2145, 1994.
- [14] KIM, J. and OSTROWSKI, J.; Motion planning of aerial robot using rapidly-exploration random trees with dynamic constraints, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Taipei (Taiwan), September, 2003.
- [15] LAMIRAUX, F. and LAUMOND, J.P.; Smooth motion planning for car-like vehicles, IEEE Transaction ion Robotics and Automation, vol. 17, no. 4, pag. 498-502, August, 2001.
- [16] LATOMBE, J.C.; Robot motion planning, Kluwer Academic, 1991.
- [17] LI, Z. and CANNY, J.F.; Nonholonomic motion planning, Kluwer, Internacional series in engineering and computers.
- [18] LOZANO-PEREZ, T.; Spatial planning: a configuration space approach, IEEE Transaction Computer, vol. 32, no. 2, 1983.
- [19] OVERMARS M. and SVESTKA, P.; A probabilistic learning approach to motion planing, Workshop in Algoritmic Foundations of Robotics, San Francisco C.A., vol. 32, no. 2, 1994.
- [20] RAO, J.; LUO, J.; GONG, Z.; JIANG, Z. and XIE, S.; Design of flight control system for a robotic blimp, SPIE the International, 2005.
- [21] RIVES, P. and AZHINEIRA, J.; Linear structures following by an airship using vanishing point and horizon line in visual servoing scheme, IEEE International Conference on Robotics and Automation, New OrLans (LA), April, 2005.

- [22] WALSH, G.; MONTGOMERY, R. and SASTRY, S.; Optimal path planing on matrix Lie groups, Proceeding of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL- December, 1994.

- [23] YANG, G. and KAPILA, V.; Optimal path planing for unmanned air vehicles with kinematic and tractical constraints, Proceeding of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Pag. 1301-1306, 2002.

- [24] ZHANG, H. and OSTROWSKI, J.; Visual servoing with dynamics: Control of an unmanned blimp, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Detroit (Michigan), May, 1999.