Revista Academia y Virtualidad 2020 Vol. 13(1)

Enero-Junio 2020 ▪ e-ISSN: 2011-0731 ▪ pp. 10 - 22

DOI: https://doi.org/10.18359/ravi.4337

Concepciones de futuros profesores de matemáticas en el contexto de la argumentación

Jonathan Alberto Cervantes-Barraza[a]

Resumen: El objetivo de esta investigación es caracterizar las concepciones matemáticas de futuros profesores en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto de la argumentación. Los conceptos de argumentación colectiva, las concepciones matemáticas y las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen el marco conceptual de la investigación, reflejados en la implementación del modelo enriquecido de Toulmin, una herramienta metodológica que permite reconstruir las concepciones de los profesores desde la argumentación matemática. Los resultados de la investigación señalan que las concepciones matemáticas de futuros profesores se fundamentan en los sistemas de representación y las formas para comprobar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias para el caso de las curvas ortogonales.

Palabras clave: educación matemática; concepciones matemáticas; argumentación matemática; ecuaciones diferenciales ordinarias

Fecha de recepción: 29 de mayo de 2019 **Fecha de aprobación:** 06 de agosto de 2019

Cómo citar: Cervantes-Barraza, J. A. (2020). Concepciones de futuros profesores de matemáticas en el contexto de la argumentación. *Academia y virtualidad*, *13*(1), 10-22. DOI: https://doi.org/10.18359/ravi.4337

a Magíster en matemática educativa, licenciado en Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpanginco,México. Correo electrónico: jacervantes@uagro.mx

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7000-4977

Conceptions of Future Mathematics Teachers in the Context of Argumentation

Abstract: The objective or this research is to characterize the mathematical conceptions of future teachers in the resolution of ordinary differential equations in the context of argumentation. The collective argumentation concepts, the mathematical conceptions and ordinary differential equations constitute the research conceptual framework, reflected in the implementation of the enriched Toulmin model, a methodological tool that allows us to reconstruct the teachers' conceptions from the mathematical argumentation. The findings of the research indicate that the mathematical conceptions of future teachers are grounded on representation systems and on the ways to prove solutions for ordinary differential equations in the case of orthogonal trajectories.

Keywords: mathematics education; mathematical conceptions; mathematical argumentation; ordinary differential equations

Concepções de futuros docentes de Matemática no contexto da argumentação

Resumo: objetivo desta pesquisa é caracterizar as concepções matemáticas de futuros docentes na resolução de equações diferenciais ordinárias no contexto da argumentação. Os conceitos de "argumentação coletiva", "concepções matemáticas" e "equações diferenciais ordinárias" constituem o enquadramento conceitual da pesquisa, refletidos na implantação do modelo enriquecido de Toulmin, uma ferramenta metodológica que permite reconstruir as concepções dos professores a partir da argumentação matemática. Os resultados da pesquisa indicam que as concepções matemáticas de futuros docentes estão fundamentadas nos sistemas de representação e nas formas para comprovar soluções de equações diferenciais ordinárias para o caso das curvas ortogonais.

Palavras-chave: ensino de Matemática; concepções matemáticas; argumentação matemática; equações diferenciais ordinárias

Introducción

En la literatura de la educación matemática, el rol del profesor se ha estudiado desde diferentes perspectivas, entre estas, la práctica y el conocimiento matemático específico (Flores y Carrillo, 2014; Hill y Ball, 2004; Leiria, González y Pinto, 2014), los niveles de comprensión y razonamientos empleados en relación con temas específicos de la matemática (Juárez y Inzunsa, 2014) y el conocimiento didáctico-matemático del profesor (Pinto, 2010). Investigaciones en el contexto del razonamiento matemático documentan que los profesores implementan diversas formas del discurso, con base en lo gráfico, lo textual y el formato mixto en la resolución de pruebas (Clemente y Llinares, 2015). Asimismo, se ha documentado el cambio de las concepciones de profesores en torno a la argumentación en clase de ciencia, en particular los aspectos epistemológicos y didácticos. Esto implica el fortalecimiento de la argumentación y aspectos conceptuales, relacionados con la enseñanza de las ciencias con base en la interacción profesor-estudiante-medio (Ruiz, Márquez y Tamayo, 2012).

En el marco de la argumentación y la prueba matemática se han identificado dos tipos de investigación que abordan las concepciones de profesores. Una tiene que ver con las concepciones de la prueba matemática por parte de los profesores y la otra con las concepciones sobre la resolución de problemas en diferentes contextos. Con respecto a la primera, Conner (2008) estudió las concepciones de futuros profesores de secundaria sobre la naturaleza de la prueba matemática, focalizó su investigación en identificar cómo influye en la enseñanza en relación con el propósito y la necesidad de probar en clases de matemática. En el mismo sentido, Knuth (2002) identificó que las concepciones de profesores de matemática sobre lo que es una prueba matemática son limitadas, en razón a que le atribuyen la función de verificador de una conjetura matemática.

En la resolución de problemas, Alsina (2012) reporta las transformaciones de las concepciones de un grupo de profesores con base en el proceso de reflexión y comparación de su práctica docente con la de los demás. Al respecto, Salinas y Sgreccia (2017) abordan el estudio de las concepciones de profesores en torno a problemas y ejercicios matemáticos en el nivel de secundaria, y señalan que identificaron las concepciones sobre la solución de problemas y ejercicios en función de varios aspectos de la clase y las características del grupo de estudiantes. En un nivel curricular, las normas para la práctica matemática (CCSSI, 2010) establecen que los profesores de matemática de todos los niveles deben tratar de desarrollar en sus estudiantes una serie de prácticas en términos de "procesos y competencias", entre estos la argumentación. Específicamente, el tercer estándar hace referencia a que los profesores promuevan en sus estudiantes la construcción de argumentos viables, y ellos, a su vez, puedan cuestionar el razonamiento de los demás. Bajo estas ideas, Conner (2013) destaca la importancia de involucrar futuros profesores en la producción de la argumentación matemática, con el propósito de guiar a sus estudiantes en la producción de argumentos. Por tanto, establecer y criticar argumentos se convierte en un enfoque en las clases de matemáticas, necesario para que los profesores faciliten la argumentación colectiva (Wagner, Conner, Singletary y Francisco, 2014).

El centro de interés en estudios sobre las concepciones matemáticas de profesores de secundaria en la literatura de la educación matemática es analizar las concepciones sobre la prueba, así como los roles que cumple esta en la enseñanza de la matemática (Knuth, 2002), las formas en las que el profesor contribuye a la producción de la prueba a nivel colectivo en el salón de clases (Conner, 2008), y las ideas de cómo enseñar métodos de prueba y concepciones relacionadas con su utilidad (Varghese, 2009). Ante los antecedentes presentados, cabe resaltar la ausencia de investigaciones sobre las concepciones matemáticas de futuros profesores en torno a la solución de ecuaciones diferenciales en el contexto de la argumentación. En este sentido, Pedemonte y Balacheff (2016) aseguran que es obvia la necesidad de realizar investigación centrada en analizar las concepciones matemáticas del profesor en torno a la argumentación, puesto que la concepción puede afectar la argumentación del estudiante. Reforzado lo anterior, con la escasez de investigaciones enfocadas en estudiar al profesor en formación y en vista de que se han realizado numerosas investigaciones enfocadas en estudiar profesores activos (Leiria *et al*., 2014), es menester conducir investigaciones que documenten sobre la concepción y argumentación del futuro profesor. Por tanto, en esta investigación se priorizan las prácticas argumentativas realizadas por el profesor y las concepciones que adquieren sus alumnos en relación con el contenido matemático en estudio, lo que induce a la idea, como objetivo de la investigación, de caracterizar en el contexto de la argumentación las concepciones matemáticas de futuros profesores de la materia cuando desarrollan tareas de ecuaciones diferenciales.

De las ideas plasmadas se evidencia, como producto de la revisión de la literatura especializada, una carencia de investigaciones que aborden el estudio de las concepciones sobre la argumentación matemática de los profesores activos. Más aún, de forma puntual es notoria la escasez de pesquisas sobre argumentaciones y concepciones de contenidos matemáticos por parte de profesores en formación, y en específico en los debates del salón de clases relacionados con las ecuaciones diferenciales y la solución de problemas que refieren a las curvas ortogonales. Consecuentemente, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son las concepciones matemáticas de los futuros profesores cuando —en el contexto de la argumentación en clase— resuelven ecuaciones diferenciales ordinarias?

Elementos teóricos

La investigación se sustenta en conceptos base tales como la argumentación matemática, las concepciones matemáticas y las ecuaciones diferenciales ordinarias. La integración de estos conceptos fundamenta la investigación y facilitan la interpretación de los resultados.

Concepciones matemáticas

En el marco de la matemática educativa el concepto de concepción se ha definido desde diversas posturas. En particular, en esta investigación se entiende una concepción matemática como un estado de equilibrio entre las acciones realizadas por el aprendiz y el medio bajo el cual interactúa (Balacheff, 2013). Esta se constituye de cuatro componentes que conforman una cuádrupla relacionada con la concepción matemática del aprendiz. El primer componente de la cuádrupla se caracteriza por el conjunto de situaciones problemas (P), para las cuales los estudiantes establecen soluciones. El segundo componente es el conjunto de operadores (R) o reglas matemáticas que los estudiantes usan para solucionar y fundamentar las respuestas a las situaciones problemas. El tercer componente es el conjunto de representaciones (L), es decir, los registros semióticos implementados durante la resolución de los problemas. En particular, las representaciones vinculan el tipo de operador y su respectivo uso. El cuarto componente es la estructura de control (Σ), el cual corresponde al conjunto de medios en los que los estudiantes toman decisiones, identifican opciones y evalúan su producción. Esta estructura incluye comportamientos tales como evaluar la retroalimentación, tomar decisiones o juzgar el avance de una solución a problemas (Balacheff, 2013). Estos cuatro componentes constituyen la cuádrupla (P, R, L, Σ), la cual modela la concepción matemática del aprendiz y se caracteriza de forma congruente con la definición conceptual de una concepción como propiedad del aprendizaje en un medio específico (Balacheff, 2013).

Argumentación matemática

Este concepto hace parte de la teoría de la argumentación, basada en los resultados sistemáticos del estudio del discurso, las producciones y el análisis de la validez del punto de partida de un argumentador en su discurso. Específicamente, la argumentación se ubica dentro de la lógica informal, la cual hace referencia a los argumentos que involucran el uso del lenguaje cotidiano (Van Eemeren y Grootendorst, 2014). Sin embargo, en el contexto de la matemática, la argumentación refiere al acto de establecer conclusiones con el objetivo de convencer a una audiencia a través de la producción de razones (i. e., regularidades, propiedades matemáticas, entre otras), al responder a críticas/refutaciones establecidas por una segunda persona, respaldar las razones establecidas y así sucesivamente. En este proceso se establecen argumentos que refieren a cadenas de razonamientos, secuencias de afirmaciones vinculadas entre sí y razones que entre ellas establecen el contenido y la fuerza de la posición del argumentador (Toulmin, 2003).

En el sentido de Toulmin, un argumento se conforma por una estructura de seis elementos (véase la Figura 1). Los datos (D) hacen alusión a la información base sobre la cual se establece una afirmación, la aserción (A) es la afirmación establecida por el argumentador en el acto de convencer a una audiencia, esta se justifica con base en la garantía (G), la cual tiene el papel de conectar lógicamente los datos con la aserción. Además, la garantía cuenta con el respaldo (Re), elemento que contiene de forma general teoremas, axiomas, teorías matemáticas o ejemplos que apoyan la garantía. La fuerza de la aserción viene dada a través de frases como, por ejemplo, "certeramente", "probablemente" o "siempre", entre otras identificadas como el calificador modal (C); la refutación (R) evidencia las excepciones de la aserción, en otras palabras, los casos en los que la garantía no conecta lógicamente los datos con la aserción (Toulmin, 2003).

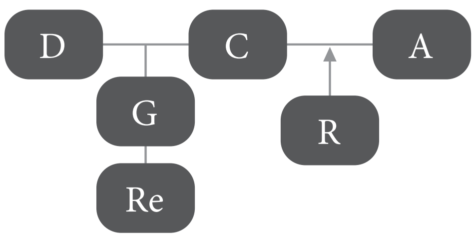

Figura 1. Modelo argumentativo de Toulmin (2003)

En el contexto de la enseñanza de la matemática escolar, la argumentación que involucra conceptos matemáticos refiere a la argumentación matemática (Whitenack y Knipping, 2002). Particularmente, la argumentación en el salón de clases sucede a nivel colectivo e involucra la participación de los estudiantes y el profesor (Krummheuer, 1995). Además, se considera un constructo útil en el análisis de la naturaleza de la actividad que se suscita en clase de matemática; esto, cuando se resuelven problemas de forma colaborativa y discusiones con toda la clase (Yackel, 2002). En cambio, Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco (2014), así como Krummheuer (2007), lo usan para referirse a la interacción que ocurre entre dos o más individuos cuando trabajan juntos con el fin de establecer una afirmación o una conclusión.

Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

La definición de una ecuación diferencial se retoma de Zill (1997), quien la define como una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. Las ecuaciones diferenciales se clasifican según su orden, tipo o linealidad. Si una ecuación solo contiene una derivada ordinaria de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO). La clasificación según el orden de la ecuación es con respecto a la derivada de mayor orden en la ecuación.

Un caso particular de EDO aborda la familia de curvas ortogonales. Estas refieren a todas las curvas de una familia G(x, y, C1) = 0 que cortan ortogonalmente todas las curvas de otra familia, H(x, y, C2) = 0. Además, se dice que las familias de curvas son trayectorias ortogonales entre sí (véase la Figura 2), si solo si se cumple que dy/dx =f(x, y) es la ecuación diferencial de una familia; por tanto, la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales es dy/dx = -1/f(x, y) (Zill, 1997).

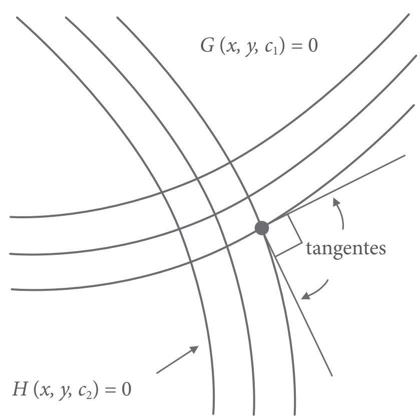

Figura 2. Familia de curvas ortogonales.
Fuente: Zill (1997)

Metodología de investigación

La investigación es un estudio cualitativo, basado en la recolección de datos empíricos a través de métodos específicos con el propósito de estudiar un fenómeno en particular mediante la interpretación de los datos en conjunto (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). La metodología que se adopta se fundamenta en un experimento del desarrollo del conocimiento del profesor (*teacher development experiment* TDE). Esta metodología permite estudiar el desarrollo del pensamiento del profesor en formación o activo a través de un ciclo continuo de análisis de escenas en las que el profesor-investigador desarrolla tareas matemáticas diseñadas por un grupo de investigadores (Simon, 2000). En lo que se refiere al método, se implementó el modelo enriquecido de Toulmin propuesto por Pedemonte y Balacheff (2016), pues este facilita la reconstrucción y el análisis de las concepciones matemáticas de los estudiantes para profesores en la interacción con el investigador durante el intercambio de argumentos suscitados en el salón de clases.

Fases del experimento del desarrollo del conocimiento del profesor TDE

El experimento del desarrollo del conocimiento del profesor TDE, así como el experimento de enseñanza (Valverde, 2014), está constituido por tres fases: preparación del experimento, ejecución del experimento y análisis de los datos (Simon, 2000).

Preparación del experimento

En esta etapa, el grupo de investigadores se reúne con el propósito de definir el contenido matemático y el objetivo central del experimento, justificado con base en la problemática que se pretende abordar en la investigación. Además, se discute la elección de los participantes y las condiciones que deben tener para ser parte del experimento, así como sobre los diseños y las metodologías de enseñanza recomendadas.

Con base en lo anterior, se elaboraron hipótesis relativas al desarrollo del conocimiento del profesor en relación con el tema en estudio con el fin de ser contrastadas desde el análisis de cada sesión y reflexionar sobre un nuevo diseño que se aplicará en las intervenciones futuras.

Ejecución del experimento

En la fase de experimentación, el docente-investigador desarrolla las tareas diseñadas con un grupo de estudiantes para profesor en un número de sesiones videograbadas. Asimismo, al término de las sesiones los investigadores-observadores se reúnen con el profesor con el objetivo de contrastar las hipótesis planteadas con anterioridad y, dado el caso, replantearlas para futuras intervenciones. Esta parte de la etapa, según Simon (2002), se denomina “el ciclo de reflexión-interacción”; en este se analiza el desarrollo del conocimiento del profesor basado en la producción escrita y la argumentación colectiva.

Análisis de los datos

Esta etapa se fundamenta en el análisis de la totalidad de los datos a partir de la trascripción de las sesiones videograbadas llevadas a cabo. Posteriormente, se organizan los datos en conjunto para ser analizados con el método seleccionado (sección 5.2) y reflexionar sobre los datos obtenidos. Además, a manera de aporte, el TDE tiene como finalidad proponer un modelo o esquema que describa el desarrollo del conocimiento del profesor, en nuestro caso modelos sobre las concepciones matemáticas de los profesores en el contexto de la argumentación y la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Participantes e instrumentos para la recolección de datos

Los participantes involucrados en la toma de datos son tres estudiantes para profesor de matemática que cursaban sexto semestre de la carrera de licenciatura de una universidad pública del sur de México. También participaron de forma activa en la toma de datos dentro del salón de clases los dos investigadores en función de auxiliares, así como en los momentos de reflexión-interacción con el futuro profesor, con el propósito de indagar sobre sus concepciones matemáticas. Los instrumentos que se implementaron en la recolección de los datos fueron: observación participante, diseño de las tareas matemáticas y notas de campo realizadas por los investigadores.

El experimento de enseñanza está conformado por una tarea que refiere al estudio de familia de curvas ortogonales. La tarea se diseñó con el objetivo de recuperar y familiarizar conceptos claves relacionados con el estudio de las familias de curvas ortogonales, e involucrar a los estudiantes en determinarlas con base en una familia dada. La aplicación y el desarrollo de la tarea T demandó dos horas reloj. En un primer momento, el profesor investigador propuso a los estudiantes resolver la tarea y, al término de esta, se realizó una retroalimentación con base en las respuestas presentadas. Para el desarrollo de la tarea matemática el profesor investigador les facilitó computadoras a los estudiantes y la tarea matemática impresa. Luego de que los estudiantes terminaran, el profesor investigador generó un ambiente propicio para compartir las respuestas. Con la intención de generar la argumentación entre los estudiantes, proyectó el trabajo escrito y lo realizado en el GeoGebra de cada uno sobre la pizarra con la ayuda de un proyector.

Tarea matemática (t)

Encuentra algebraicamente la familia de curvas ortogonales a cada una de las ecuaciones, luego, apoyado en el *software* GeoGebra, grafícalas.

a. $x + 2y = c$

b. $x^2 + 2y^2 = c$

Responde las siguientes cuestiones: 1) ¿visualmente qué se puede inferir al trazar las tangentes correspondientes a cada una de las curvas por el punto de intersección de las mismas? (explique ampliamente); 2) al comparar las pendientes de las rectas tangentes a la curva en un punto de intersección, ¿qué se puede determinar? (explique ampliamente); 3) ¿cómo puedes relacionar lo algebraico y lo gráfico del cálculo de las curvas ortogonales?

Método

El modelo de Toulmin se ha caracterizado por ser una herramienta metodológica que permite reconstruir argumentos con base en el reconocimiento de elementos que conforman una estructura argumentativa. Sin embargo, investigadores como Conner (2008), o Pedemonte y Balacheff (2016), reconocen limitaciones en su uso. Por su parte, Conner (2008) las reconoce porque, en la reconstrucción desde lo colectivo, las intervenciones del profesor quedan aisladas; en otras palabras, no se consideran como parte del argumento, por lo cual realizó una adaptación que consiste en incorporar la intervención del profesor.

En el mismo sentido, Pedemonte y Balacheff (2016) reconocen dos limitaciones. Con respecto a la primera indican que el modelo deja de lado los conocimientos base de los estudiantes en su totalidad; por otra parte, la garantía, reconocida en muchos casos, es ambigua en relación con la regla o propiedad matemática en juego. Con base en el reconocimiento de estas limitaciones integraron el modelo argumentativo de Toulmin junto con la cuádrupla (P, R, L, Σ) que caracteriza una concepción matemática (Balacheff,2013), y generaron así un modelo enriquecido de Toulmin (véase la Figura 3) que tiene en cuenta el conocimiento matemático de los estudiantes en términos de concepciones matemáticas reconocidas durante la interacción argumentativa, y puntualiza las reglas y las propiedades matemáticas involucradas en la garantía del argumentador.

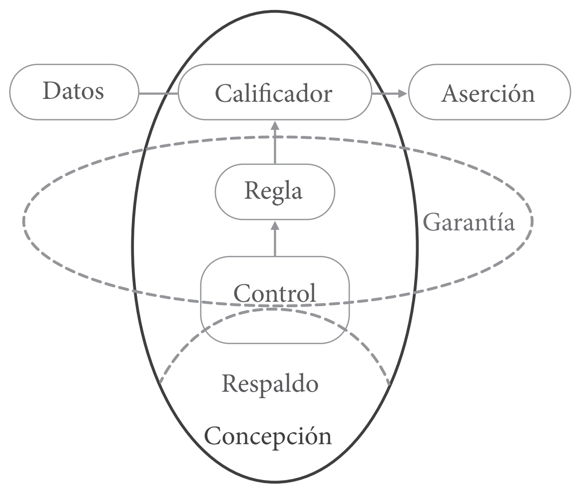

Figura 3. Modelo enriquecido de Toulmin.
Fuente: Pedemonte y Balacheff (2016)

Los elementos de la estructura argumentativa se relacionan junto con los componentes de la cuádrupla que caracteriza una concepción matemática. Esto, en el sentido de que un conjunto de problemas matemáticos (P), inicialmente planteados, se pueden representar mediante un conjunto de proposiciones (datos) expresado en términos de un sistema de representación (L). Con base en las proposiciones dadas, en su respectivo sistema de representación, se aplica una regla (R) u operador con el propósito de transformarlas en una nueva aserción. El conjunto de transformaciones es iterativo y termina cuando se obtiene una aserción verdadera guiada por la estructura control (Σ) y esta se hace explícita en el contenido de la garantía. Esta versión enriquecida del modelo de Toulmin se usará en la investigación propuesta para llevar a cabo la reconstrucción de las concepciones de futuros profesores desde la argumentación suscitada en el salón de clases.

Resultados de la investigación

Los resultados que se presentan contienen las concepciones matemáticas (CM) de los estudiantes para profesor de matemática en términos de partes argumentativas como lo son los datos, las garantías, las conclusiones y los respaldos. En función de reproducir la operatividad de los conceptos base de la investigación se reconstruye la argumentación matemática de los estudiantes para profesores en función de los componentes de las concepciones matemáticas mediante el modelo enriquecido de Toulmin propuesto por Pedemonte y Balacheff (2016). Como aporte metodológico a la reconstrucción y el análisis de la argumentación, se agregó la participación del profesor en el modelo enriquecido de Toulim en función de contener un panorama general de la argumentación-concepción matemática (véase la Figura 4).

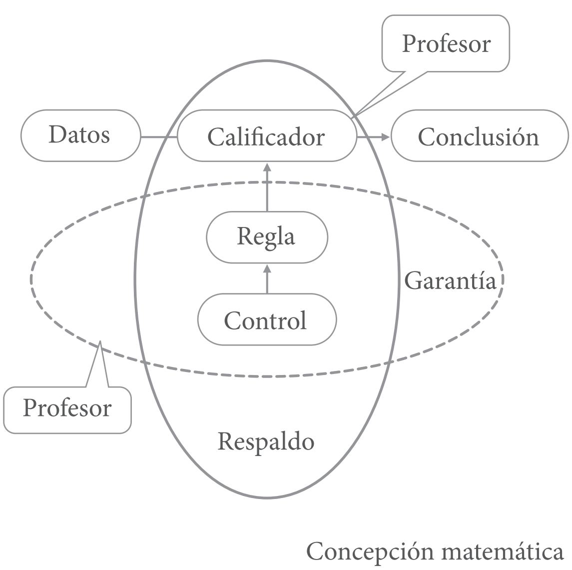

Figura 4. Adaptación del modelo enriquecido de Toulmin. Fuente: elaboración propia.

Concepción matemática, el caso de Jesús sobre el inciso (a) de la tarea

La concepción matemática del estudiante sobre las curvas ortogonales en el contexto de las ecuaciones diferenciales se reconoce desde la reconstrucción de las funciones argumentativas. Cabe resaltar que la estructura básica emergente en el desarrollo del experimento se caracteriza por contener datos, aserción, garantías y respaldos (Inglis, Mejia-Ramos y Simpson, 2007). En efecto, el estudiante Jesús retoma como información inicial los datos del problema (P) de la tarea matemática, es decir, tiene como datos una familia de curvas para determinar una familia de curvas ortogonales.

- Profesor, D1: Encuentra algebraicamente la familia de curvas ortogonales a: $x + 2y = c$
- Jesús, A1: La familia de curvas es y=2x+c
- Miguel, A2: y-2x=c
- Juan, A3: y-2x =c

Los tres estudiantes para profesor establecen sus aserciones (A1, A2, A3), sin embargo, Jesús presenta —a diferencia de sus compañeros— un conjunto de razones que soportan su aserción (A1) en términos de la garantía de su argumento (G1). Su contenido refiere a un procedimiento para determinar una familia de curvas ortogonal de funciones lineales mediante la regla matemática (R) relacionada con la derivación de funciones y el análisis de las pendientes de las rectas. A *grosso modo*, la regla consiste en determinar el valor de las pendientes y analizar si su producto es menos uno o no, lo que implica una relación de paralelismo y/o perpendicularidad, con la intersección en un punto o reciprocidad (véase el Apéndice A).

- Profesor: ¿Cómo comprueban ustedes que las familias de curvas encontradas son ortogonales?
- Jesús, G1: Primero vemos el punto de intersección
- Profesor: ¿Cuál sería el punto de intersección?
- Jesús, G1: En este caso como las curvas son rectas, lo único que hay que ver si las pendientes [rectas] son perpendiculares, bueno es el caso de que son rectas.

- Profesor: Bueno, dado lo que tienen ahí la familia de curva encontrada, ¿es ortogonal a la primera?
- Jesús, G1: En este caso como son rectas, es fácil ver que las pendientes son perpendiculares, o sea que una pendiente es recíproca y de signo contrario con respecto a la otra.

El sistema de representación (L) empleado por el estudiante es el analítico, en función de los aspectos de las rectas, la ubicación de puntos en el plano y de determinar su sentido, tal como lo indica el estudiante en su garantía y respaldo. En efecto, la transformación (∑) que realizó el estudiante de la regla matemática sobre los datos iniciales (familia de curvas dadas) se reflejan en la gráficación y comprobación de que las curvas son ortogonales.

- Profesor: ¿Cuál es la pendiente de la primera recta?
- Jesús, RE1: -1/2
- Profesor: ¿Y de la segunda?
- Jesús, RE: 2.
- Profesor: Entonces, esas curvas son…
- Jesús: A1: Ortogonales, para cualquier c.
- Profesor: Encuentra algebraicamente la familia de curvas ortogonales a: $x + 2y = c$.
- Jesús, A1: La familia de curvas es y=2x+c.
- Miguel, A2: y-2x=c.
- Juan, A3: y-2x =c.

En resumen, la concepción de los estudiantes para profesor concurren en los argumentos establecidos por el estudiante Jesús. Es decir, Miguel y Juan llegaron a la misma familia de curvas ortogonales basados en la regla de derivación para determinar la pendiente, al resolver la ecuación diferencial ordinaria, y con esta a estudiar la relación entre las pendientes de las curvas para concluir sobre la ortogonalidad. La concepción matemática de los estudiantes (véase la Figura 5) sobre las curvas ortogonales recae en el sistema de representación analítico, el cual consiste en determinar las pendientes de las curvas dadas y analizar si el producto es menos uno, o en casos particulares, analizar con base en las gráficas de las rectas si son perpendiculares o no.

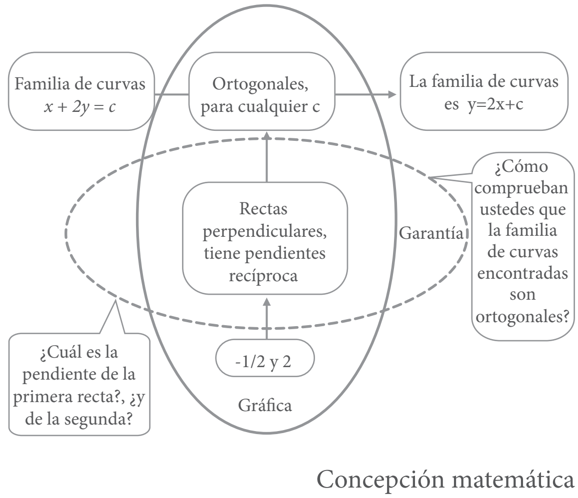

Figura 5. Concepción matemática de Jesús.
Fuente: elaboración propia.

Un aspecto a resaltar en la concepción de los estudiantes para profesor es el razonamiento matemático empleado para determinar la familia de curvas ortogonales a una dada. La garantía del estudiante recae en el razonaminto inductivo, con base en estudiar de manera particular la función y con esto determinar la familia de curvas pedida. Lo anterior se identifica en procedimientos de los estudiantes, puesto que al derivar la función incial y aplicar el método de separación de variables se les facilita integrar y determinar la familia de curvas ortogonales, en términos de la ecuación diferencial que contiene la pendiente de la curva buscada.

El caso de una concepción colectiva en el inciso (b) de la tarea

La interacción entre los estudiantes que aspiran a ser profesores generó la construcción de una concepción colectiva entre Jesús, Juan y Miguel. Esta consiste en la integración de reglas matemáticas en un solo sistema de representación basado en lo analítico. Los estudiantes concluyen sobre curvas ortogonales escritas de forma diferente, pero representan una misma familia de curvas ortogonales a la inicial.

- Profesor, D1: ¿Jesús… cuál es la familia de curvas ortogonales?
- Jesús, A1: $y = k\,x^2$.

- Juan, A2: $y/x^2=c$.
- Jesús, A3: $\frac{\sqrt{y}}{x^2}=c$.

La garantía de la concepción colectiva se enmarca en el estudio del comportamiento de las pendientes en los puntos de intersección. Esta concepción se fundamenta desde conocimientos matemáticos sobre la derivación de funciones y conceptos matemáticos tales como pendiente, rectas, paralelas y perpendiculares.

- Profesor: ¿Cómo aseguran ustedes que esa es la familia de curvas ortogonal a la curva dada?
- Jesús, G1: Ver el comportamiento de las pendientes en los puntos de intersección.
- Profesor: Gráficamente, ¿cuál es la idea?
- Jesús, G1: Ubicar los puntos de intersección, luego sacar las pendientes de cada curva y después compararlas.
- Profesor: ¿Y qué pasa con las pendientes?
- Juan, G2: Tiene que ser perpendiculares.

Sobre el sistema de representación, los tres estudiantes concurren en que la graficación de las rectas en un *software* dinámico de geometría (GeoGebra) evidencia de manera directa si las rectas son perpendiculares o no. En el contexto del sistema de representación analítico, los estudiantes relacionan lo algebraico con lo gráfico como un medio para comprobar que las curvas determinadas sean ortogonales a las iniciales.

Respuestas a las preguntas de la tarea matemática

- Profesor: ¿Visualmente qué se puede concluir al trazar las rectas tangentes a las curvas en los puntos de intersección?
- Miguel, A3: Que ambas tangentes (rectas) son ortogonales entre sí.
- Profesor: ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas?
- Miguel, A3: -1,7x +0,5y= -0,4 y 0,68x +1,59y=1,72.
- Profesor: Al comparar las pendientes de las rectas a las cuervas en los puntos intersección, ¿qué se puede determinar?
- Juan, G2: Si las rectas son perpendiculares, nos damos cuenta de que las curvas son ortogonales.
- Profesor: ¿Cómo puedes relacionar lo algebraico y lo gráfico de las curvas ortogonales?
- Jesús, G1: Lo gráfico, lo entiendo como lo visual, así miro la relación que tiene el procedimiento que se siguió para encontrar la familia de curvas ortogonales y gráficamente vemos que las rectas son perpendiculares. Siento que lo algebraico si no lo haces correcto es una forma de darte cuenta de si cometes un error, dependiendo de tu procedimiento.
- Juan, G2: Con lo algebraico llegamos a construir una familia de curvas y a la vez confirmamos con lo gráfico lo algebraico.
- Miguel, G3: En lo gráfico, vemos el comportamiento de las gráficas y a partir de allí determinamos sus tangentes y con lo gráfico vemos también que las rectas tangentes son ortogonales. Con lo algebraico determinamos una familia ortogonal a la función dada, lo algebraico para comparar los valores de las pendientes y ver que son recíprocas.

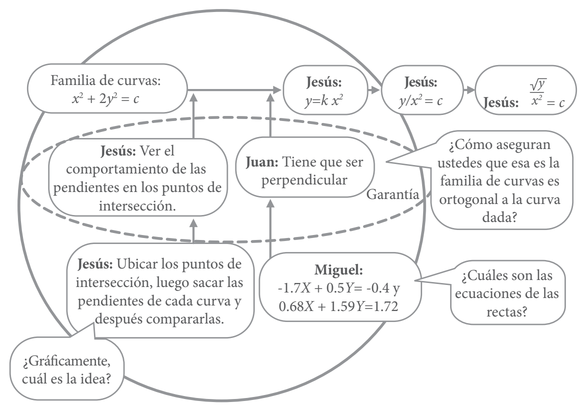

Figura 6. Concepción colectiva de los estudiantes para profesor. Fuente: elaboración propia.

En la concepción colectiva (Figura 6), los estudiantes se apoyaron en el *software* para comprobar que las ecuaciones determinadas en la derivada de la función incial coincidieran y, sobre todo, la relación entre el producto de las pendientes de las rectas sea igual a menos uno. Además, los procedimientos algebráicos —como lo indicaron los estudiantes— operan con las funciones, el cálculo de la derivada y la determinación de pendientes que materializan en la graficación de la función encontrada y la gráfica inicial en un mismo plano cartesiano.

En la reconstrucción de la argumentación del inciso *b* y con base en los componentes de una concepción, se reúnen en una argumentación colectiva guiada por el profesor y presentada por los estudiantes. En síntesis, la concepción colectiva enmarca un razonamiento matemático inductivo bajo el estudio de casos particulares a fin de determinar una familia de curvas que, a la vez, incluye el sistema de representación analítico apoyado desde la gráfica de funciones en un plano cartesiano.

Discusión y conclusión

Con base en el análisis de la reconstrucción de la argumentación, las garantías de los estudiantes contienen propiedades matemáticas que fundamentan los procedimientos para resolver la ecuación diferencial planteada en la tarea (Nardi, Biza y Zachariades, 2012). El procedimiento identificado en los argumentos de los estudiantes para determinar la familia de curvas ortogonales a una dada consistió en derivar con respecto "x" la familia de la curva inicial. Con esto se determina la pendiente de la recta tangente a la curva de la función inicial, luego encuentran una pendiente recíproca de signo contrario para solucionar la ecuación diferencial y así determinar la familia de curvas ortogonal a la familia de curvas dadas.

El razonamiento que emplearon los tres estudiantes aspirantes a ser profesores en la solución de la tarea matemática se basa en la construcción de una conclusión (familia de curvas ortogonales a la inicial) desde un conjunto de pasos lógicos (procedimientos matemáticos: cálculo de la derivada, determinar la recta perpendicular a la dada, integrar y operar algebraicamente). Es decir, el razonamiento implícito para encontrar una familia de curvas ortogonales a una familia dada es el razonamiento inductivo.

En este proceso, los estudiantes parten visualmente de que las pendientes son perpendiculares, entonces la familia de curvas encontrada es ortogonal a la primera. En relación con este tipo de razonamiento, la regla que permite garantizar que la familia de curvas es ortogonal a la encontrada es la derivada de la familia dada (Zill, 1997), la cual se hace recíproca para luego determinar la familia de curvas ortogonales mediante la solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Como parte de la investigación, se reconoce que los razonamientos de los estudiantes en la resolución de EDO aborda la faceta visual en la determinación de familias de curvas ortogonales. En efecto, esta faceta jugó el papel de soporte o verificador, es decir, a través de lo visual se comprueba que lo algebraico es correcto. De manera análoga, la faceta algebraica también desempeñó un papel importante, dado que derivar la familia inicial y determinar la pendiente recíproca a la familia de curvas dadas soportaron la construcción de familias de curvas ortogonales.

A modo de cierre, se constata que las concepciones de los futuros profesores de matemática en el contexto de la argumentación y la resolución de ecuaciones diferenciales tienen que ver con la cuádrupla (P, R, L, Σ) en términos de (familia de curvas f(x), derivada de f(x), analítico, comprobación). La concepción se traduce en que los profesores bajo un sistema de representación analítico relacionan la gráfica de la familia de curvas dadas con la familia de curvas ortogonales como medio para comprobar o verificar que los procedimientos algebraicos y aritméticos son correctos (cálculo de la derivada, recíproco de la pendiente y operaciones aritméticas, entre otras).

Referencias

Alsina, A. (2012). Proceso de transformación de las concepciones del profesorado sobre la resolución de problemas matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 71-88.

Balacheff, N. (2013). cKc, a model to reason on learners' conceptions. En M. V. Martinez & A. Castro, *Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 2-15). Chicago.

Clemente, F. & Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 9-27.

Conner, M. (2008). Expanded Toulmin diagrams: a tool for investigating complex activity in classrooms. En O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 361-368), México, Morelia.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. Recuperado de: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Conner, M. (2013). Authentic argumentation with prospective secondary teachers: the case of 0.99. *Mathematics Teacher Educator, 1*, 172-180.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. & Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: a framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities, *Educational Studies Mathematics*, *86* (2), 401-429.

Eemeren, H. van & Grootendorst, R. (2014). *Developments in argumentation theory*. Recuperado de: http://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00010570.pdf

Flores, E. & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialized knowledge through her practice. En S. Oesterle, P. Liljedahl, P., C. Nicol & D. Allan (eds.), *Proceedings of the Joint Meeting 3-81of PME 38 and PME -NA 36,* 3 (vol. 3, pp. 81-88). Vancouver: PME.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hill, H. C. & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Inglis, M., Mejía-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007). Modeling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3-21.

Juárez, J. A. & Inzunsa, S. (2014). Comprensión y razonamiento de profesores de matemáticas de bachillerato sobre conceptos estadísticos básicos. *Perfiles Educativos, 36*(146), 14-23.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale: Erlbaum.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60-82.

Leiria, A. C., González, M. T. & Pinto, J. E. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. *PNA*, *10*(1), 25-52.

Nardi, E., Biza, I. & Zachariades, T. (2012). "Warrant" revisited: integrating mathematics teachers pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 157-173. doi: 10.1007/s10649-011-9345-y

Pedemonte, B. & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *Journal of Mathematical Behavior, 41,* 104-122.

Pinto, J. E. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación* (Tesis doctoral inédita). Departamento de Didáctica de la Mmatemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

Ruiz, O. F., Márquez, C. & Tamayo O. E. (2014). Cambio en las concepciones de los docentes sobre la argumentación y su desarrollo en clase de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 53-70.

Salinas, N. & N. Sgreccia. (2017). Concepciones docentes acerca de la resolución de Problemas en la escuela secundaria**.** *Revista Números, 94*, 23-45.

Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teacher: the teacher development experiment. En A. Kelly & R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Nueva York: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D. & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (2ª ed.). Nueva York, Londres: Macmillan.

Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 14*(3), 1-20.

Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. *IUMPST: The Journal, 1*, 1-14.

Wagner, P., Conner, A., Singletary, L. & Francisco, R. (2014). Using Toulmin's model to develop prospective secondary mathematics teachers' conceptions of collective argumentation. *Mathematics Teacher Educator, 3*(1), 8-26.

Whitenack, J. & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(4), 441-457.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 423-440.

Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales* (6ª ed.). México: Thomson.

Apéndice A

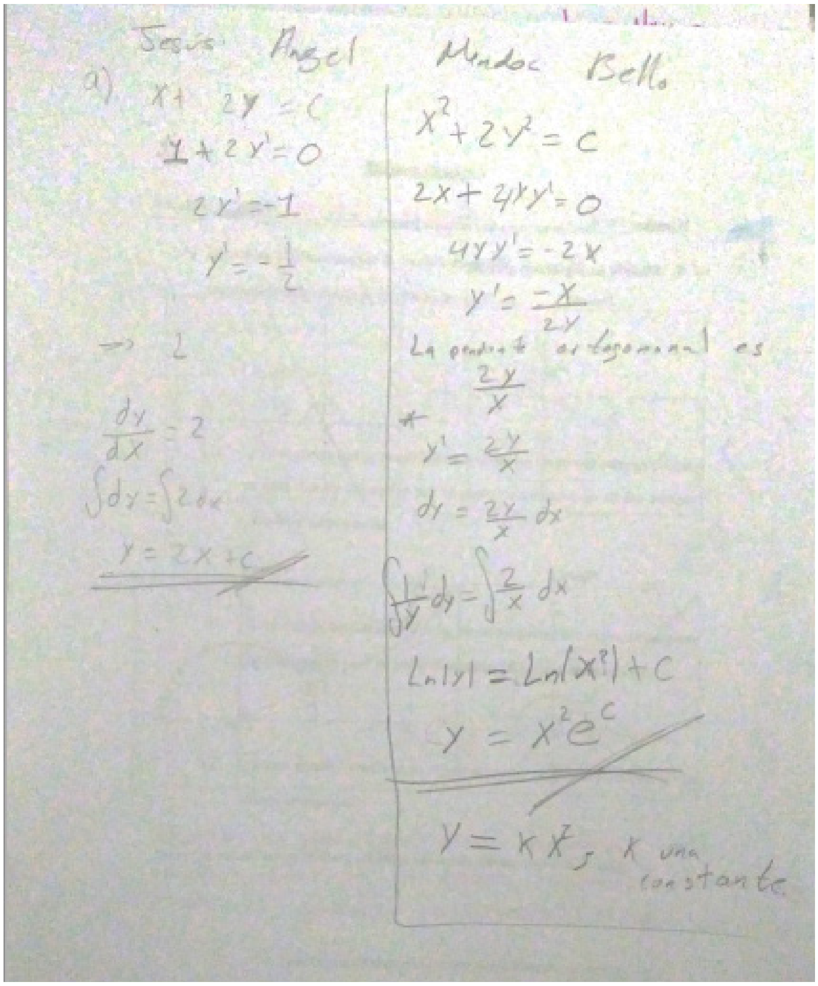

Figura A1. Solución del inciso (a) y (b) del estudiante Jesús