

Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje¹

Neel Báez Ureña², Olga Lidia Pérez González³ y Ramón Blanco Sánchez⁴

Recibido, Junio 1 de 2017

Concepto evaluación, Septiembre 23 de 2017

Aceptado, Septiembre 25 de 2017

Referencia: Báez Ureña, N., Pérez González, O. L. y Blanco Sánchez, R. (2018). Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje. *Revista Academia y Virtualidad*, 11, (1), 16-26

Resumen

Se presenta una propuesta didáctica que utiliza los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados de Vigotsky sobre pensamiento y lenguaje, para contribuir a la formación conceptual en el cálculo diferencial en las carreras universitarias, mediante las representaciones semióticas de los procesos de variación instantánea, y con la ayuda de los asistentes matemáticos GeoGebra y el SkechPath, los cuales permiten ilustrar el movimiento de la variable. La metodología seguida articula el proceso de adquisición de recursos para la transferencia de registros semióticos, el proceso de formación del lenguaje matemático y el tránsito del lenguaje coloquial al matemático en la descripción del movimiento de la variable. La validación experimental demostró que con la aplicación de la propuesta se logró una mejora significativa de los estudiantes en relación al lenguaje matemático y a las aplicaciones conceptuales en el Cálculo Diferencial, lo cual constituyó el objetivo de la investigación.

Palabras clave: registros de representación semiótica; cálculo diferencial; formación conceptual.

¹ Artículo de investigación científica y tecnológica

² Universidad Autónoma de Santo Domingo, República Dominicana, Departamento de Matemática, Máster en Matemática Aplicada, estudiante de doctorado en Ciencias Pedagógicas. E-Mail: neelbaez@gmail.com

³ Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Doctora en Ciencias Pedagógicas, Presidenta del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Premio Nacional de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación. E-Mail: olguitapg@gmail.com

⁴ Universidad de Camagüey Ignacio Agramonte Loynaz, Doctor en Ciencias Pedagógicas, Premio Nacional de la Academia de Ciencias de Cuba. E-Mail: ramon.blanco@reduc.edu.cu

**The semiotic representations register as a way of materialization
vigotsky's postulates about thought and language**

Abstract

The didactic proposal presented uses records of semiotic representation as a materializing way of Vygotsky's postulates on thought and language. This proposal will contribute to the conceptual formation in Differential Calculus in university careers, through semiotic representations of instantaneous variation processes. It will also be supported with mathematical assistants, such as GeoGebra and SketchPad; both illustrate the movement of the variable. The methodology followed articulates the resources acquisition process for the semiotic records transfers, the formation process of mathematical language, and the transit from colloquial to mathematician language in the variable movement description. The experimental validation showed that the proposal application achieved a significant improvement of the students in the mathematical language and conceptual applications in the Differential Calculus, thus achieving the research objective.

Keywords: semiotic representations register; Diferencial Calculus; conceptual formation.

**As representações semióticas se inscrevem como uma forma de materialização
dos postulados de vigotsky sobre pensamento e linguagem**

Resumo

Apresenta-se uma proposta didática que utiliza os registros de representação semiótica como via de materialização dos postulados do Vigotsky sobre pensamento e linguagem, para contribuir à formação conceitual no cálculo diferencial nas carreiras universitárias, mediante as representações semióticas dos processos de variação foto instantânea, e com a ajuda dos assistentes matemáticos GeoGebra e o SkechPath, os quais permitem ilustrar o movimento da variável. A metodologia seguida articula o proceso de aquisição de recursos para a transferência de registros semióticos, o processo de formação da linguagem matemática, e o trânsito da linguagem coloquial à matemático na descrição do movimento da variável. A validação experimental demonstrou que com a aplicação da proposta se obteve uma melhora significativa dos estudantes em relação à linguagem matemática e às aplicações conceituais no Cálculo Diferencial, o qual constituiu o objetivo da investigação.

Palavras chave: registros de representação semiótica; cálculo diferencial; formação conceitual.

Introducción

En la República Dominicana, las dificultades que se manifestaban en la matemática universitaria determinó que en el año 2007 la Secretaría de Educación Superior para la Ciencia y la Tecnología desarrollara un proceso de evaluación quinquenal, donde se precisó la necesidad de introducir mejoras en el proceso de formación matemática de los futuros profesionales, así como la búsqueda de estrategias para el desarrollo del pensamiento lógico (Taborda y Meneses, 2015), para que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos a la solución de problemas relacionados con el desarrollo social y tecnológico, haciéndose énfasis en las disciplinas básicas como el Cálculo Diferencial (Báez, Martínez, Pérez y Pérez, 2017).

En este sentido, las investigaciones sobre formación matemática en el nivel universitario confirman la necesidad de realizar un trabajo didáctico con los recursos para la representación y transferencia de registros semióticos (Duval, 2006; Camargo, 2013; Radford, 2013; Macías, 2014), considerándose los asistentes matemáticos como un recurso indispensable para propiciar la comprensión de este contenido, pues a través de ellos existe la posibilidad de ilustrar el movimiento de la variable, siendo este uno de los elementos del conocimiento que mayores dificultades tienen los estudiantes (Báez, Blanco y Pérez, 2015).

La comprensión del movimiento de la variable está relacionada con el concepto de límite, el cual se manifiesta como uno de los obstáculos a vencer por los estudiantes en los cursos de Cálculo Diferencial (Sierpínska, 1987), que a su vez está relacionado con el adecuado uso del lenguaje matemático y las relaciones funcionales implícitas, lo que hacen que este sea un contenido de extrema complejidad para ellos (Báez, Blanco y Pérez, 2015).

El objetivo de la investigación es contribuir a la formación conceptual en el Cálculo Diferencial de las carreras universitarias, con la ayuda de los asistentes matemáticos

GeoGebra y el SकेchPath, a través de una propuesta didáctica que utilice los registros de representación semiótica, de los procesos de variación instantánea, como vía de materialización de los postulados de Vigotsky sobre pensamiento y lenguaje.

Aunque se reconoce la riqueza de significados que pueden ser utilizados para conceptualizar la derivada (Pino-Fan, Godino & Font, 2011), por exigencias curriculares de la matemática universitaria en República Dominicana (Báez, Pérez y Triana, 2017; Báez, Martínez, Pérez y Pérez, 2017), los autores desarrollan la propuesta utilizando su significado mediante límites, como vía para argumentar la articulación entre el proceso de adquisición de recursos para la transferencia de registros semióticos, el proceso de formación del lenguaje matemático y el tránsito del lenguaje coloquial al matemático en la descripción del movimiento de la variable, recomendando para futuras investigaciones la misma propuesta desde otras perspectivas, en función de dichos significados.

Antecedentes

Investigaciones realizadas en la actualidad revelan que el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática constituye uno de los problemas más significativos dentro de cualquier modelo educativo (Cabezas y Mendoza, 2016), y que los niveles bajos de promoción y altos de repetición en estos cursos, tanto en la educación media como en los cursos universitarios, son dos de los indicadores de esta problemática, cuya dimensión humana se encuentra ligada a la frustración, tanto de los estudiantes como de los profesores, por lo que resulta fundamental su estudio desde diferentes perspectivas (García, 2013).

Varios autores plantean que los resultados que obtienen los estudiantes, después de haber cursado la asignatura de Cálculo Diferencial, evidencian un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular derivadas, pero que muestran dificultades respecto a la conceptualización de los procesos subyacentes al límite, en la noción de de-

rivada, lo que tiene por consecuencia que en su mayoría solo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, sin comprender el significado de los algoritmos que utilizan (Villa, 2012; Vrancken & Engler, 2013; Villalonga, González, Marcilla, Mercau y Holgado, 2014).

Se precisa, además, que la causante de estas dificultades es la dependencia existente entre los diferentes conceptos que se estudian en el Cálculo Diferencial y la incompreensión del límite de una función, el cual resulta elusivo para los estudiantes (D'Amore, 2012), dado que involucra el infinito y la relación funcional, aspectos novedosos para ellos.

Por otra parte, si se considera que el lenguaje matemático está asociado a la representación de los conceptos matemáticos, a su dinámica, o sintaxis representacional, en y entre los registros semióticos, entonces ha de reconocerse la importancia de mejorarlo en la actividad matemática de los estudiantes, para lograr una mejor expresión de la funcionalidad, de las propiedades y de las relaciones que se manifiestan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, así como para favorecer la actividad procedimental con los registros semióticos.

En este sentido, los autores de la investigación reconocen la importancia didáctica de que se comprenda que el carácter no ostensivo de los conceptos matemáticos es lo que determina su existencia y su identificación con el concepto que lo materializa, y que esta es una de las razones por la que los estudiantes suelen trabajar a nivel de sus representaciones específicas, y por lo que no logran identificar las características que dichas representaciones no ponen de manifiesto (Duval, 2006).

Es por eso que el tratamiento didáctico de las representaciones y transferencias de registros semióticos en el Cálculo Diferencial debe abordar el movimiento de la variable, con la utilización de asistentes matemáticos, para que los estudiantes puedan apreciar dicho movimiento y así poder lograr mayor comprensión de esta asignatura.

En dicho tratamiento didáctico se debe asumir, además, que el lenguaje matemático y los registros de representación semiótica no deben ser considerados como una meta en sí mismos, sino como el medio de materialización del pensamiento y de la interacción social, cuya importancia está determinada por el carácter social del conocimiento y del aprendizaje.

Marco teórico

Para alcanzar el objetivo propuesto en la investigación se asumen como referentes teóricos la transferencia de registros semióticos (Duval, 2006) y la relación entre pensamiento y lenguaje (Vigotsky, 1978), donde se considera a este último como medio de materialización de dicha transferencia.

Se asumen los trabajos de Duval pues ellos han encontrado un respaldo considerable en la comunidad científica que se dedica al estudio del proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática (Báez, Martínez, Pérez y Pérez, 2017), llegando al consenso de la necesidad de que los estudiantes independicen el concepto matemático de su representación.

Esta teoría de la mediación semiótica basa sus planteamientos sobre los signos desde la perspectiva vigotskyana, según la cual estos son objetos cognitivos, herramientas psicológicas y materiales, que desempeñan una función mediadora entre el individuo y su contexto, por ser portadores del pensamiento de las personas, y al mismo tiempo de su saber cultural (Duval, 2006). De esta manera, el aprendizaje ocurre en una actividad social mediada por herramientas, en la cual emergen signos que posibilitan la comunicación con los demás y con uno mismo.

Los trabajos de Vigotsky muestran la importancia de la interacción social en el proceso enseñanza-aprendizaje, ya que la apropiación conceptual parte de acciones de los estudiantes sobre las diferentes representaciones semióticas del concepto, las que se dan a un nivel intersíquico en interacción social con sus pares, hasta su apropiación a un nivel intrasíquico. Además, Vigotsky defiende

el carácter mediatizado de la psique humana, como el carácter distintivo del ser humano, ya que este es el único ser vivo en la tierra, que es capaz de materializar su pensamiento en símbolos y sobre esta materialización el pensamiento sigue su curso (Báez, Blanco y Pérez, 2015).

Es por esto que en la investigación se articulan los trabajos de Vigotsky y los planteamientos sobre los registros de representación semiótica, dado que el carácter no ostensivo de los conceptos matemáticos determina la necesidad de su materialización semiótica, donde se manifiesta el carácter mediatizado de la psique humana.

A partir de esta articulación, los autores de la investigación, asumen los siguientes postulados:

- Las representaciones semióticas permiten la materialización de los conceptos matemáticos, usando diferentes signos o símbolos, como el lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos geométricos e incluso íconos, y constituyen el medio a través del cual se pueden externalizar las representaciones mentales, no solo para hacerla accesible a los demás, sino también para poder analizar su propio pensamiento.
- Dado el carácter no ostensivo de los conceptos matemáticos, a los estudiantes se le muestran las representaciones semióticas de los mismos, donde cada una pone de relieve sus características, de ahí la necesidad de que deban realizar la transferencia de un registro a otro, para lo que se sugiere hacer uso de los asistentes mediadores para favorecer la comprensión por parte de los estudiantes.
- Para la comprensión de los conceptos matemáticos se deben realizar actividades que impliquen el uso de diferentes registros de representación de los mismos, de modo que los estudiantes puedan materializar los rasgos que lo caracterizan.
- Los signos explicitan los significados, individuales o personales, relativos a los conceptos matemáticos involucrados,

los cuales pueden evolucionar hacia significados socialmente compartidos por una comunidad de referencia.

- La interacción social depende del lenguaje, como vía de materialización del pensamiento, para hacerlo accesible a otros, entendiéndose como componentes del lenguaje matemático los diferentes signos y símbolos, que junto con las palabras lo componen.

Metodología

Dado el nexo que existe entre el infinito en Matemática y el concepto de límite con el resto de los conceptos del Cálculo Diferencial, tanto desde la Matemática como ciencia, como desde su concepción didáctica, se hace necesario la búsqueda de vías para lograr que el estudiante se apropie de dichos conceptos (D'Amore, 2012), considerándose que no es suficiente usar los registros de representación semiótica y la transferencia de un tipo de registro a otro, sino que se requiere de propuestas concretas de cómo se debe articular, didácticamente, su uso en el desarrollo de las actividades docentes y en la orientación del trabajo de los estudiantes. En el caso particular del Cálculo Diferencial, se requirió articular mediante una estructura sistémica los registros de representación semiótica, el movimiento de la variable, y el uso de la función, como elementos esenciales del lenguaje matemático, para lo cual se acudió al apoyo de los asistentes matemáticos para ilustrar el movimiento de la variable, de modo que los estudiantes pudieran comprender e interiorizar el lenguaje matemático, los registros de representación semiótica y la transferencia entre ellos, como parte de las herramientas que necesitan para su actividad matemática.

Teniendo en consideración lo anterior la metodología seguida para el diseño de la propuesta didáctica tuvo sus bases en la integración del:

1. Proceso de adquisición de recursos para la transferencia de registros semióticos en el Cálculo Diferencial, con el uso de

los asistentes matemáticos como mediadores para los cambios de registros.

2. Proceso de formación del lenguaje matemático, con el uso de los asistentes matemáticos como mediadores para los cambios de registros.
3. Tránsito del lenguaje coloquial al matemático en la descripción del movimiento de la variable.

Para la utilización de los asistentes matemáticos se tuvo como marco de referencia los trabajos de Hitt (2003, 2014), en relación a la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología y en específico la derivada, así como las nuevas tendencias en su enseñanza, para lo que se seleccionaron los asistentes matemáticos GeoGebra y el SheckPath, para ilustrar a través de ellos el movimiento de la variable.

Considerando los aspectos anteriores, la propuesta didáctica estuvo conformada por las siguientes acciones:

1. Cambios de representaciones semióticas, dentro de un mismo registro y entre diferentes registros de representación, con la intención de que los estudiantes las incorporen como herramientas para su actividad matemática.

En esta acción los estudiantes pudieron apreciar cómo la definición de derivada condujo a la función derivada,

$$\cos(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \text{ cuando } h \text{ tiende a cero, utilizando el GeoGebra, poniendo a } h \text{ en el deslizador y, con sus movimientos, se pudo observar que cuando } h \text{ tiende a cero se obtiene su derivada, o sea la función seno.}$$

Se solicitó a los estudiantes calcular la derivada de la función: $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^4 + 3x^3 - x}$, tarea que se realizó de forma práctica, haciendo un cambio de registro de representación, aplicando logaritmo en ambos miembros, de modo que en lugar de un cociente se deriva una suma.

Se requirió entrenar a los estudiantes en los cambios de registros que resultan del

cambio de escala en los ejes coordenados, en relación al comportamiento asintótico de la función $y = \frac{\cos(x)}{x}$ cuando x crece, y que, si

no se reduce la escala del eje y , el estudiante no podría visualizar el desarrollo asintótico de la función.

2. Formación del lenguaje matemático, utilizando los asistentes matemáticos como mediadores para los cambios de registros.

Se trabajó en los extremos, puntos de inflexión, intervalos de monotonía y convexidad de una función dada, entrenando a los estudiantes en el uso del lenguaje matemático, para lo que se requirió la realización de tareas donde describieran dichos elementos a partir del gráfico de la función, pero exigiéndoles rigurosidad en la denominación de los elementos que identifican.

3. Propiciar el tránsito del lenguaje coloquial al matemático en la descripción del movimiento de la variable.

Esta acción se dirigió en tres direcciones:

- a. Interpretación del movimiento de la variable en aproximación a una recta.
- b. Interpretación del movimiento de la variable al infinito.
- c. Interpretación del movimiento de la variable en aproximación a un punto.

En el primer caso se hizo uso del movimiento asintótico de la variable en aplicaciones del Cálculo Diferencial, pues este movimiento caracteriza el desarrollo asintótico de diferentes curvas, lo cual significa que se aproximan cada vez más a la recta según la abscisa crece continuamente o se aproxima indefinidamente a un valor determinado, aquí se hizo necesaria la utilización de los asistentes matemáticos, para lograr las representaciones semióticas necesarias e ilustrar los diferentes casos que se presentan. Las representaciones gráficas que se utilizaron siempre estuvieron asociadas a sus representaciones analíticas, mediante el uso del límite funcional, por lo que se requirió de la transferencia del registro gráfico al analítico y viceversa, aprovechándose esta relación,

desde el punto de vista didáctico, para que los estudiantes pudieran apreciar la relación entre los diferentes tipos de asíntotas con diferentes modos de movimiento de la variable.

Se enfatizó en que los estudiantes analizarán cada nuevo concepto, no como algo más que deben aprender, sino como una nueva herramienta que les será útil en su actividad matemática, como es el caso de las asíntotas, las cuales brindan diferentes informaciones sobre las curvas con las que se relacionan.

En el segundo caso, se analizó que el movimiento de la variable independiente al infinito puede provocar diferentes movimientos de la dependiente, la cual puede moverse al infinito o a un punto, dando lugar a límites infinitos o finitos, aunque la variable independiente se mueva al infinito, por lo que se realizaron acciones para que el estudiante comprendiera esta diferencia.

Para lo anterior se utilizaron límites como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 \text{ Y } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x^3 + x^2)} \rightarrow \infty, \text{ de modo}$$

que los estudiantes pudieran apreciar que el movimiento de la variable independiente provoca en el movimiento de la dependiente diferentes consecuencias.

El tercer caso estuvo orientado al movimiento no intuitivo de la variable, dado que, en los objetos concretos, cuando algo se aproxima continuamente a un lugar termina por llegar a ese lugar, que no es el caso en Matemática. Para argumentar esta idea se analizó

$$\text{el } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}, \text{ donde la variable se aproxima}$$

infinitamente a 0, pero no llega a ser 0.

Muchos estudiantes aceptan esta situación, pero no la llegan a comprender, por lo que su trabajo con los límites se hace mecánico, y por consiguiente con la derivada y otros conceptos del Cálculo Diferencial, por tanto, se calcularon límites utilizando su definición analítica, dirigiendo la atención de los estudiantes hacia la interpretación de cada uno de los elementos que intervienen en la definición y no al trabajo algebraico que este tipo de tareas implica.

Por ejemplo, se calculó, utilizando la definición, la derivada de la siguiente función

$$\text{ción en } x = 0, f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

mostrando que la función tiene derivadas laterales, pero no derivada en el punto.

Para este ejercicio se tuvo en cuenta que las similitudes del lenguaje coloquial con el matemático propician que los estudiantes no manejen correctamente este último, como es el caso de la periodicidad, dado que consideran lo periódico como algo que se repite y no en el sentido matemático, incluso conociendo la definición matemática de función periódica.

Y para contribuir a que los estudiantes se apropiaran del lenguaje matemático, se les asignaron tareas relacionadas con los conceptos de continuidad, periodicidad, límite y movimiento, donde se tuvo que distinguir la forma que se usan los mismos en el lenguaje coloquial.

Implementación de la propuesta

Las tareas se implementaron propiciando la integración sistémica de las tres acciones que caracterizan la propuesta, a través de las acciones descritas en la metodología, dirigidas a la formación conceptual en el Cálculo Diferencial, con el objetivo contribuir a la formación conceptual en el Cálculo Diferencial de las carreras universitarias, con la ayuda de los asistentes matemáticos GeoGebra y el SkechPath.

Para ilustrar la implementación de la propuesta, por limitaciones del espacio disponible, se hace una descripción de esta.

1. Las generalidades de las tareas se ejecutaron con el apoyo del software SkechPath y el GeoGebra para visualizar el movimiento de la variable en los fenómenos que se estudian, exigiéndose rigurosidad en el lenguaje matemático para evitar planteamientos ambiguos.
2. Se calcularon límites mediante la definición, simplificando el trabajo algebraico

para que los estudiantes pudieran concentrar su atención en los elementos que caracterizan el concepto de límite. Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$

3. Se ejecutaron tareas de aplicaciones inmediatas de la derivada, como cálculo de rectas tangentes, velocidad instantánea, intensidad de la corriente y fuerza constante, y de variación instantánea.
4. El estudio de extremos, intervalos de monotonía y concavidad se hizo utilizando los asistentes matemáticos de geometría dinámica para mostrar la relación de estos elementos con la recta tangente a la curva.
5. Los problemas de optimización se tomaron como fundamento para la necesidad de la determinación de los puntos extremos de las funciones.

Validación experimental de los resultados

La propuesta se implementó en las carreras técnicas de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD), República Dominicana, en el curso 2015-2016, utilizando la técnica de grupos paralelos, mediante la cual se seleccionaron 4 grupos a partir del resultado que tuvieron en la prueba diagnóstica que realiza la Facultad de Ingeniería.

Lo anterior permitió asumir un nivel de entrada similar en los grupos seleccionados, utilizando dos como grupos control y dos como experimentales, con la participación de dos profesores con igual experiencia y categoría docente.

Para el desarrollo del experimento se planteó la siguiente hipótesis:

Si se desarrolla el proceso enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial a través de la integración sistémica de:

- Proceso de adquisición de recursos para la transferencia de registros semióticos en el Cálculo Diferencial, con el uso de los asistentes matemáticos como mediadores para los cambios de registro.
- Proceso de formación del lenguaje matemático, con el uso de los asistentes matemáticos como mediadores para los cambios de registro.

- Tránsito del lenguaje coloquial al matemático en la descripción del movimiento de la variable.

Entonces se contribuye a que los estudiantes tengan mejor formación conceptual en el Cálculo Diferencial de las carreras universitarias.

La intervención en la práctica consistió en desarrollar el proceso enseñanza-aprendizaje en los grupos experimentales de acuerdo a la propuesta didáctica, así como la aplicación de una prueba de salida, tanto a los grupos de control como experimentales, para valorar los efectos de dicha propuesta en la muestra seleccionada.

Durante el desarrollo de la propuesta se tuvo en cuenta el nivel de cumplimiento, por parte de los estudiantes, de las tareas asignadas, como control de su desarrollo. La comparación de las pruebas a los grupos de control y experimentales se realizó para apreciar el efecto general de la propuesta en el desarrollo de los estudiantes.

La prueba estuvo compuesta por 15 preguntas, y para evaluar sus resultados se consideraron los siguientes indicadores, con sus correspondientes criterios de medida (tabla 1), los cuales fueron validados por los autores a través del método de experto.

Resultados

Se pudo comprobar que entre los dos grupos experimentales no hubo diferencia significativa y que hubo mejores resultados en estos grupos con respecto a los grupos donde no se realizó el experimento.

Al comparar los resultados entre los grupos de control y experimentales, se observó que se manifestaron avances notables en lo que respecta al uso y aplicación de los conceptos, así como en el uso del lenguaje matemático, en los grupos experimentales.

En una comparación detallada por tipos de preguntas entre los grupos de control y experimentales, se encontró que, en las preguntas de aplicaciones conceptuales, el enfoque adecuado tuvo una media porcentual de: 88.2 en los grupos experimentales y de

Tabla 1.*Indicadores y criterios de medida para evaluar a los estudiantes*

Indicadores	Criterios de medida
Enfoque empleado	Acertado y no acertado
Método de trabajo	Acertado y no acertado
Errores en el proceso de resolución	Sin errores, con errores
Uso del lenguaje matemático	Correcto, mezclado y coloquial
Respuesta	Correcta, imprecisa y errónea

Fuente: elaboración propia.

60.4 en los grupos de control, lo que determina una mejoría de más de 27 puntos porcentuales en la media.

En relación al uso del lenguaje matemático, la media de la valoración de cada pregunta fue de 55.75 en los grupos experimentales, de lo cual no se puede decir que sea buena, pero al compararla con el resultado en los grupos de control que fue de 28.66, se pudo apreciar que hubo una mejoría de alrededor de 27 puntos porcentuales, lo que representó un avance notable.

Por último, se aplicaron dos pruebas de hipótesis con el uso del Statgraphics.plus, para determinar si se puede afirmar con un 95% de confianza la diferencia entre las medias de las preguntas sin errores en el proceso de resolución y las medias de las preguntas correctas entre los grupos experimentales y de control, lo que determinó una diferencia de 15 puntos en el primer caso y de 20 en el segundo, con un nivel de confianza del 95%.

Conclusiones

La investigación propone una propuesta didáctica para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial, que se caracteriza por articular el proceso de adquisición de recursos para la transferencia de registros semióticos, con el proceso de formación del lenguaje matemático en la descripción del movimiento de la variable, a través del uso de asistentes matemáticos para ilustrar dicho movimiento.

La validación experimental permitió demostrar que la propuesta conduce a una mejora significativa de los estudiantes, en relación al lenguaje matemático y a las aplicaciones conceptuales en el Cálculo Diferencial, identificando y manipulando el movimiento de las variables, los cuales adquirieron recursos propios para realizar transferencias de registros semióticos e independizaron el concepto de sus representaciones, todo lo cual contribuyó notablemente a su formación conceptual, donde los asistentes matemáticos constituyeron un adecuado escenario didáctico, no solo como herramienta de la actividad matemática sino también como elemento de motivación de los estudiantes. Sin embargo, se debe resaltar que, para obtener los resultados satisfactorios, fue necesario enfrentar discrepancias entre el enfoque de las tareas del libro de texto y las planteadas en la propuesta, así como con la preparación que tienen los estudiantes con la utilización de los asistentes matemáticos. Es recomendable, para posteriores investigaciones, estudiar experimentalmente esta propuesta didáctica, teniendo en consideración otros significados de la derivada y con el uso de otros asistentes matemáticos, lo que obviamente conllevará al diseño de nuevos tipos de tareas.

Agradecimientos

Agradecimiento al apoyo brindado a la Universidad Autónoma de Santo Domingo y al Proyecto Nacional del Departamento de

Matemática de la Universidad de Camagüey, “Perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática” (código PP221LH053), asociado al Programa Nacional Problemas Actuales del Sistema Educativo Cubano. Perspectivas de desarrollo, del Ministerio de Educación de Cuba.

Referencias

- Báez, A., Martínez, Y., Pérez, O. y Pérez, R. (2017). Propuesta de Tareas para el Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Ingeniería. *Formación Universitaria*, 10(3), 93-106.
- Báez, A., Pérez, O y Triana, B. (2017). Propuesta didáctica basada en múltiples formas de representación semiótica de los objetos matemáticos para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial. *Academia y Virtualidad*, 10(2), 20-30.
- Báez, N., Blanco, R. y Pérez, O. (2015). Dificultades de los alumnos en el trabajo con los conceptos del Cálculo Diferencial. En R. Flore (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 28, 57-63. Recuperado de: www.clame.org.mx
- Cabezas, C. y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación universitaria*, 9(6), 13-26.
- Camargo, Á. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay, 16 al 20 de septiembre de 2013.
- D’Amore, B. (2012). *La Didáctica del Infinito Matemático*. (Memorias del 4to. Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación). En Roa Fuentes, S., Evelyn Parada, S. y Fiallo Leal, J. (Eds.). Bucaramanga, Colombia.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (1), 143-168.
- García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, 37(1), 29-42.
- Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 439-453.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-223.
- Hitt, F. (2014). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista AMIUTEM*, 2(2), 1-19.
- Macías, J. (2014). Los registros semióticos en Matemáticas como elemento personalizado en el aprendizaje. *Revista de Investigación Educativa Conect@2*, 4(9), 27-57.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Radford, L. (2013). On Semiotics and Education. *Éducation et Didactique*, 7(1), 185-204.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.
- Taborda, S. & Meneses, E. (2015). Laboratorio virtual de matemáticas como estrategia didáctica para fomentar el pensamiento lógico. *Academia y virtualidad*, 8(2), 73-84.
- Vigotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Villa, J. (2012). *El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada*. (Memorias del 4to. Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación). En Roa Fuentes, S., Evely Parada, S. y Fiallo Leal, J. (Eds.). Bucaramanga, Colombia.

Villalonga, P., González, S., Marcilla, M. I., Mercau, S. y Holgado, L. (2014). Procedimientos matemáticos para aprender límite. Su evaluación. Unión. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 38, 103-114.

Vrancken, S. Engler, A, Giamperi, M. & Müller, D. (2015). Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades. *Revista digital, Matemática, Educación e Internet*, 15(1), 2-20.