





DOI: <https://doi.org/10.18359/litgris.7324>

## **Universidad Militar Nueva Granada**

Rector

**MG (R) Javier Alberto Ayala Amaya**

Vicerrector General

**BG (R) Milton Orlando Vargas Mariño**

Vicerrectora Académica

**Carol Eugenia Arévalo Daza**

Vicerrector Administrativo

**Dra. Claudia Ximena López Pareja**

Vicerrectora de Investigaciones

**Astrid Rubiano Fonseca**

Vicerrector Campus Nueva Granada

**CR (RA) Pedro Javier Rojas Guevara**

Editor General - Editorial Neogranadina

**M. Sc. Luz Martha Melo Rodrigues Ph.D.**

## **Memorias y artículos del III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas**

Cajicá, Colombia, 17 y 18 de mayo de 2023

Memorias realizadas por John Fabio Aguilar Sánchez, Oscar Javier Martínez Herrera y Cyndi Julieth Ospina García

Esta edición se realizó con el esfuerzo colectivo de todos los que participaron en el III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas.

Diseño y diagramación

**Luz Marina Betancourt Marulanda**

© Universidad Militar Nueva Granada

© Vicerrectoría de Investigaciones

© Editorial Neogranadina

Sede Campus, edificio de Posgrados, primer piso

Kilómetro 2, vía Cajicá-Zipacquirá, costado oriental

Teléfono: 650 00 00 Ext. 3092

[editorial.neogranadina@unimilitar.edu.co](mailto:editorial.neogranadina@unimilitar.edu.co)

[www.umng.edu.co](http://www.umng.edu.co)

# **Memorias y artículos del III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas**

Cajicá, Colombia, 17 y 18 de mayo de 2023





## Agradecimientos

---

Queremos extender nuestro especial agradecimiento a todo el equipo de organizadores que se ha vinculado en esta edición del evento: la empresa Quantil, el Departamento de Matemáticas de la Universidad Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito, la Universidad de los Andes, el grupo de investigación MATRIX y el semillero *Applymath*, quienes han dado un importante apoyo y soporte en las diferentes actividades que implica la organización de esta clase de eventos. También, queremos extender un especial agradecimiento a la Sociedad Colombiana de Matemáticas y a la Asociación Colombiana de Facultades, Programas y Departamentos de Economía por su invaluable apoyo en la realización de esta actividad.

Los autores extienden también un agradecimiento especial a los decanos de las facultades de Ciencias Básicas y Aplicadas y de Ciencias Económicas de la Universidad Militar Nueva Granada, por el apoyo de los profesores que organizaron esta actividad en representación de la Universidad.

Por último, queremos dar nuestro mayor agradecimiento a los investigadores y participantes, quienes han hecho que este evento sea de gran impacto para nuestras comunidades académicas.

**E**ste trabajo es resultado de la compilación de las conferencias y ponencias presentadas en el III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas; es un registro invaluable de la labor colaborativa entre el Departamento de Matemáticas y el programa de Economía (sede Campus). Desde su creación, hace tres años, el encuentro ha sido una plataforma para resaltar la importancia de las matemáticas aplicadas en las ciencias económicas, sociales y administrativas en estudiantes que, desde las aulas de clase, han estado inquietos por saber hasta dónde la matemática puede tener injerencia y rol en la toma de decisiones sobre los temas que atañen a sus carreras y a los problemas del mundo real. Así mismo, este evento representa la materialización de los esfuerzos conjuntos de ambas disciplinas para promover la investigación interdisciplinaria y la aplicación de técnicas matemáticas. Al interior de los diferentes trabajos aquí expuestos, los lectores podrán encontrar una variedad de temas que abarcan, desde la optimización de modelos económicos, hasta el análisis de políticas públicas y la aplicación de métodos estadísticos avanzados para abordar problemas sociales complejos. Los autores presentan de manera clara y concisa las bases teóricas y las herramientas metodológicas que utilizaron en sus investigaciones.

Es importante destacar que el III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas

se realizó de manera virtual, lo que permite una mayor difusión y participación, tanto a nivel nacional como internacional, y genera mayores facilidades para que investigadores, estudiantes y profesionales de diferentes partes del mundo presenten sus trabajos y participen en las discusiones sin tener que viajar físicamente al evento. Además, la modalidad virtual también permitió la grabación de las diferentes presentaciones y ponencias, lo que significa que los interesados pueden acceder a los contenidos en cualquier momento y desde cualquier lugar. De esta manera, el III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas se convierte en un recurso en línea para aquellos que quieran aprender más sobre los avances en la aplicación de las matemáticas y la estadística en las ciencias sociales y económicas.

En resumen, la realización del III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas, evento que se ha venido desarrollando en modalidad virtual, dio posibilidades de trabajo investigativo y colaborativo e intercambio de ideas en un entorno virtual que puede ayudar a acelerar el progreso de la investigación en el campo de las matemáticas y la estadística aplicadas en las ciencias sociales y económicas, tanto para investigadores *senior*, como para personas interesadas en vincularse en este tipo de actividades.

John Fabio Aguilar Sánchez  
Oscar Javier Martínez Herrera  
Cyndi Julieth Ospina García



**índice**



05	Agradecimientos
06	Editorial
13	Afiliaciones de los participantes del III Encuentro de Matemáticas y Estadística aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas
<b>17</b>	<b>Resúmenes de conferencistas invitados</b>
19	On Improving Cooperation in Public Good games
21	Análisis cuantitativo aplicado al estudio de las inequidades educativas en Colombia
22	Comercio internacional, trabajo temporal y desigualdad salarial en Colombia: el caso del sector manufacturero
<b>25</b>	<b>Ponencias</b>
27	Una mirada a la estimación del VaR mediante simulación Monte Carlo usando el <i>software @Risk 8.2</i>
30	Valoración de derivados financieros en mercados con riesgo de liquidez
36	Conceptos económicos en el aula de matemáticas y estadística, experiencias de estudiantes de economía en la Universidad Católica de Colombia
45	Propuesta de modelo matemático para la medición de la permanencia de los estudiantes de la UTS: Data 2022
50	Guerra, política y ecuaciones: incidencia del gasto público sobre la tasa de criminalidad en los estados de México
54	Perturbaciones aleatorias en un modelo tipo Gause
58	Representación mecanicista del desarrollo económico planetario: capitalismo salvaje vs capitalismo dona



## Afiliaciones de los participantes del III Encuentro de Matemáticas y Estadística Aplicadas a las Ciencias Sociales y Económicas

---

**A** continuación, se describe el listado de las instituciones asociadas a los diferentes invitados y ponentes que han contribuido en esta versión de evento.

Ligia Melo Becerra	Investigadora Banco de la República	Colombia
Douglas Newball	Quantil	Colombia
Angie Rocío Melo Casas	Universidad Católica de Colombia	Colombia
Norvey Rodríguez Fonseca	Universidad Católica de Colombia	Colombia
Jorge Andrés Sánchez Arteaga	Universidad de Antioquia	Colombia
Alexander León Valencia	Universidad de Antioquia	Colombia
Yezid Hernández Luna	Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano	Colombia
Daniel Gómez Abella	Universidad de La Sabana	Colombia
María Inés Barbosa Camargo	Universidad de La Salle	Colombia
Ignacio Sarmiento Barbieri	Universidad de Los Andes	Colombia
Samuel Arturo Torres Orozco	Universidad del Quindío	Colombia
Isabel Cristina Hoyos Rincón	Universidad del Quindío	Colombia
Edgar J. Andrade-Lotero	Universidad del Rosario	Colombia
Víctor Samuel Pérez-Díaz	Universidad del Rosario	Colombia
John Freddy Moreno Trujillo	Universidad Externado de Colombia	Colombia
Marco Pechené	UNAD sede centro sur	Colombia

Gustavo Adolfo Junca Rodríguez	Universidad Nacional de Colombia	Colombia
German Ricardo Urbina Forero	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Eliseo Gallo Albarracín	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Isnardo Arenas Navarro	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Leonid Sepúlveda	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Javier Esteban Martínez Caldas	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
María Isabel Romero Rodríguez	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Adrián Ricardo Gómez Plata	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Ronald Gentil Rodríguez Giraldo	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Cyndi Julieth Ospina García	Universidad Militar Nueva Granada	Colombia
Andrés Rivera	Pontificia Universidad Javeriana Cali	Colombia
Efrén David Montes Vera	Unidades Tecnológicas de Santander	Colombia
Germán Andrés Bautista Obregón	Unidades Tecnológicas de Santander	Colombia
Christian Camilo Cortés García	Universidad Carlos III de Madrid	España
Mateo Dulce Rubio	Universidad Carnegie Mellon	Estados Unidos
Cindy Zeng	Universidad Carnegie Mellon	Estados Unidos
Fei Fang, Hoda Heidari	Universidad Carnegie Mellon	Estados Unidos
Edwin Flórez Gómez	Universidad de Puerto Rico de Mayagüez	Estados Unidos
Christian Schaerer	Universidad Nacional de Asunción	Paraguay
Neisser Pino Romero	Universidad Peruana Cayetano Heredia	Perú





**1**

**Resúmenes de  
conferencistas  
invitados**





## Christian Schaerer<sup>1</sup>

Dr. Christian E. Schaerer. Graduado en la Universidad Nacional de Asunción-UNA (1995), doctorado (2002) por la Universidad Federal de Río de Janeiro. Posdoctorado en matemática aplicada (2003) e investigador asociado al Instituto de Matemática Pura y Aplicada - IMPA (2007), Brasil. Desde el 2008 hasta la fecha, ha sido profesor investigador DITCOM en la UNA. Ha publicado artículos científicos, en su mayoría en el campo de la simulación y control de sistemas de gran porte (computación científica), ecuaciones diferenciales y descomposición de dominio (computación paralela), y modelos matemáticos para problemas bifásicos basados en leyes de conservación. Coordina el Grupo de Investigación en Computación Científica y Matemática Aplicada (CC&MA) del Núcleo de Investigación y Desarrollo Tecnológico (NIDTEC) y del Laboratorio de Computación Científica y Aplicada (LCCA) de la Politécnica de la UNA. Actualmente, preside la Sociedad Matemática Paraguaya (SMP).

### *On Improving Cooperation in Public Goods Games*

In many cases, the success of community projects and public goods enterprises depends on the cooperation of the individuals participating in the project or the enterprise. In general, in the beginning, all community projects present a high level of cooperation. Still, many of them have sustainability problems over time

---

<sup>1</sup>Ph. D. en matemática aplicada en el Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Río de Janeiro. Doctor en Ciencias de la Universidad Federal de Río de Janeiro. Magíster en Ciencias de la Ingeniería, Universidad Federal de Río de Janeiro. Graduado en Ingeniería Electromecánica en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Asunción (UNA). Presidente de la Sociedad Matemática Paraguaya y docente investigador del Grupo de Investigación en Computación Científica y Matemática Aplicada de la Facultad Politécnica de la UNA. Correo: chris.schaerer@gmail.com

due to a lack of individual cooperation among their participants. Then, a fundamental question is: how to maintain cooperation in such entrepreneurship?

Several models were developed, including the use of Evolutionary Game Theory (EGT). More specifically, the EGT was applied to analyze and design strategies for implementing incentives to modify the evolution of system dynamics to improve and maintain cooperation. Unfortunately, incentives have a cost.

In this talk, based on an optional public good game model, we will present a new approach to the sanction model, denoted as partial punishment, where a randomly selected set of free riders is punished. The approach seeks to reduce the number of free riders while minimizing the cost of the sanctioning system. A parameter establishes the portion of free riders to be sanctioned to control the population state evolution in the game. Adjusting this sanctioning parameter, the phase portrait of the system can be modified. When it surpasses a threshold, full cooperation is achieved, i.e., the full cooperator state becomes a global attractor. I will discuss how fractional punishment can be used to adjust criteria for sanctioning to improve cooperation and reduce the sanctioning cost.

We also discuss some practical situations in community projects where the technique can be used. In addition, we will challenge the audience with some open situations to give more confidence to the model and use data-driven modeling.

Rocio Botta and Gerardo Blanco co-author this work, and is partially supported by CONACYT.

## **María Inés Barbosa Camargo<sup>2</sup>**

Doctora (*cum laude*) en análisis económico aplicado e historia económica de la Universidad de Sevilla (España), magíster en ciencias económicas y economista de la Universidad Nacional de Colombia (Colombia). Adelantó una estancia corta de investigación postdoctoral en la Universidad de Sevilla (España) como becaria de la Fundación Carolina. Actualmente, es profesora asociada en la Universidad de La Salle (Colombia). Ha participado en diferentes eventos académicos relacionados con temas de economía de la educación y ha publicado artículos sobre finanzas y negocios internacionales. Su principal área académica de interés es la economía aplicada.

### ***Análisis cuantitativo aplicado al estudio de las inequidades educativas en Colombia***

En Colombia, existen grandes brechas regionales e inequidades educativas evidenciadas en la limitada o nula oferta existente en algunos lugares del país, así como en los jóvenes menos favorecidos, que suelen ser excluidos del sistema, ya sea porque no acceden, porque son quienes con mayor dificultad completan sus estudios, o porque suelen presentar menores desempeños académicos, truncando las expectativas de vida y acrecentando la pérdida de recursos. En este contexto, se ha estudiado el acceso a la educación superior, la deserción y el desempeño académico en Colombia desde la perspectiva de la economía de la educación, que orienta los principales determinantes del fenómeno. Asimismo, se ha hecho uso de una metodología cuantitativa, que combina técnicas de análisis exploratorias con la estimación de modelos de regresión multinivel a partir de fuentes de información del ICFES y del SPADIES. En general, los resultados aportan evidencia a la discusión sobre la igualdad de oportunidades educativas y se discuten implicaciones de política pública frente a condiciones de eficiencia y equidad.

---

<sup>2</sup>Doctora en análisis económico aplicado e historia económica, magíster en ciencias económicas, especialista en pedagogía y docencia universitaria, economista. Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia. Correo: mibarbosa@uni-salle.edu.co

### **Yezid Hernández Luna<sup>3</sup>**

Ph. D. en economía y estudios avanzados en economía (*Diplôme d'Etudes Supérieures d'Université* – DESU) de *Aix-Marseille Université – Aix-Marseille School of Economics*; magíster en economía internacional y globalización de *Paris 1 Panthéon-Sorbonne Université*; magíster en economía y economista de la Universidad del Rosario.

Becario doctoral en el exterior de Colciencias, Colfuturo y la Corporación para Estudios en Francia (CEF). Se ha desempeñado como consultor en la Dirección de Justicia, Seguridad y Gobierno del Departamento Nacional de Planeación, así como en el Grupo de Protección de la Competencia en la Superintendencia de Industria y Comercio. Ha sido profesor de cátedra en las universidades del Rosario y Sergio Arboleda.

Sus áreas de interés son la economía internacional, la geografía económica, la globalización, y su relación con el bienestar social: empleo, empleo informal, desempleo, pobreza y desigualdad.

#### ***Comercio internacional, trabajo temporal y desigualdad salarial en Colombia: el caso del sector manufacturero***

Con base dos paneles, uno de 66 sectores manufactureros colombianos, en el periodo 2000-2012, y otro de 29, entre 1993 y 2012, se presenta evidencia empírica sobre la interacción de dos variables: la integración comercial y la intensidad de la calificación sectorial sobre la desigualdad salarial entre los trabajadores calificados y no calificados. Se utilizan diferentes medidas de cambio tecnológico sesgado hacia los trabajadores calificados (SBTC), las cuales se aplican como variables dependientes en el modelo econométrico, mientras que la intensidad de la calificación del sector, diferentes medidas de comercio internacional, y la interacción de estas dos últimas, constituyen las variables independientes. Ya que

---

<sup>3</sup>Ph. D. en economía y estudios avanzados en economía, magíster en economía internacional y globalización de París, magíster en economía, economista. Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Bogotá, Colombia. Correo: yezid.hernandezl@utadeo.edu.co

la llamada “apertura” y la reforma laboral se hicieron simultáneamente a comienzos de los años 90 en el país, se captura este efecto al incluir en el modelo la variable *Proporción de los Trabajadores Temporales* por sector. Como resultado, se encuentra que el efecto positivo del SBTC sobre la desigualdad salarial disminuye frente a la intensidad de la calificación sectorial y al nivel de comercio internacional. Además, a ese efecto se opone con un impacto negativo la *Proporción de Trabajadores Temporales*. Es decir, que la reforma laboral parece haber evitado un potencial incremento en la desigualdad salarial debido a la reforma comercial (la apertura).





**2**

**Ponencias**



## Una mirada a la estimación del VaR mediante simulación Monte Carlo usando el software @Risk 8.2

Urbina Forero Germán Ricardo<sup>4</sup>

### Resumen

Se presenta una forma de estimar el VaR (valor en riesgo) de una inversión realizada para un activo individual: la acción de Meta (anteriormente Facebook). La estimación se realiza usando una simulación Monte Carlo con el *software* @Risk 8.2, desarrollado por la compañía Palisade, ahora llamada Lumivero. Dicho software es, hoy en día, altamente usado por diferentes sectores de la industria, como el financiero, de seguros, farmacéutico, entre otros. Las bondades del software radican en que funciona bajo Excel y permite realizar modelación y análisis de riesgos a través de la simulación Monte Carlo. Además, tiene la ventaja de que muestra todos los posibles resultados de cualquier tipo de simulación. Por tanto, @Risk se convierte en una de las aplicaciones más usadas para realizar estimaciones del VaR, tanto para un solo activo individual, como para un portafolio.

**Palabras clave:** Valor en Riesgo (VaR); simulación; Monte Carlo; @Risk

**Tipo de trabajo:** Ponencia

### Introducción

El VaR (valor en riesgo) es una medida estadística usada para medir el riesgo de mercado de una inversión. Dicha medida puede calcularse tanto para un activo financiero individual, como para un portafolio (conjunto de activos financieros). En el caso de un activo individual, el VaR es la pérdida máxima probable que puede experimentar una inversión en un intervalo de tiempo con un cierto nivel de confianza. Dicha metodología fue desarrollada por

---

<sup>4</sup>Correo: german.urbina@unimilitar.edu.co

*J.P. Morgan* en el año 1994 y actualmente se usa extensamente en las empresas del sector financiero para evaluar los riesgos en las operaciones de inversión. Jorion [1] destaca que esta medida es válida únicamente en condiciones normales del mercado, pues, en momentos de crisis, el paradigma cambia.

Monte Carlo es una técnica estadística que se utiliza para simular diferentes escenarios posibles en un modelo y calcular la probabilidad de que ocurran. El VaR bajo Monte Carlo debe tener en cuenta tanto el intervalo de tiempo como el nivel de confianza deseado, además debe seleccionar el modelo más adecuado para el activo o portafolio y estimar los parámetros del modelo usando los datos históricos de las cotizaciones del activo. Luego, se simula un gran número de escenarios posibles usando dicho modelo y, finalmente, se selecciona la pérdida correspondiente al nivel de confianza deseado.

### **Métodos**

En términos generales, para el cálculo del VaR bajo simulación Monte Carlo se trabaja con una distribución de probabilidad calculada sobre los rendimientos del activo y se generan escenarios a partir de números aleatorios. Luego, el VaR se obtiene desde la distribución de los valores del activo simulado. En este caso, se trabajan con los rendimientos, en logaritmo, calculados con el precio diario de la acción de Meta que cotiza en la bolsa de los EE. UU., usando las fórmulas:

#### **Ecuación 1. Precio activo en período t.**

$$R_i = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \text{ o } R_i = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \text{ con } P_t$$

El VaR bajo Monte Carlo debe tener en cuenta tanto el intervalo de tiempo como el nivel de confianza deseado. En [2] se menciona que lo recomendado por JP Morgan es que los niveles de confianza sean del 95 % o 99 % considerando los precios diarios históricos del activo en cuestión.

Para la generación de escenarios, según lo enunciado en [3], se aplica el modelo de Wiener, donde, en términos discretos, se tiene que:

**Ecuación 2. Modelo de Wiener.**

$$\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}$$

Luego,

$$P_t = P_{t-1} + P_{t-1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t})$$

Donde:

$\mu$ : Media de los rendimientos o precios del activo

$\sigma$ : Desviación estándar de los rendimientos o precios del activo

$\varepsilon_t$ : Choque aleatorio o ruido blanco

Cabe decir que todas las simulaciones y generaciones de escenarios se realizan usando @Risk 8.2 de Palisade o Lumivero que, como se dijo anteriormente, muestra todos los posibles resultados de cualquier tipo de simulación.

**Bibliografía**

[1] P. Jorion, *Valor en Riesgo*, Limusa, 2002.

[2] O. Moscote, *Elementos de estadística en riesgo financiero*, Bogotá, Colombia: Ediciones USTA, 2013.

[3] A. De Lara, *Medición y control de riesgos financieros*, Limusa, 2012.

---

<sup>5</sup>Los precios de la acción de Meta y de otras acciones están abiertos al público en general y se pueden obtener del portal de Yahoo! Finance: <https://finance.yahoo.com/>

## Valoración de derivados financieros en mercados con riesgo de liquidez

Moreno Trujillo John Freddy<sup>6</sup>

### Resumen

El seminal trabajo presentado en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes sobre valoración de opciones financieras, y que aún hoy es ampliamente utilizado, está fundamentado en una serie de supuestos simplificadores sobre el funcionamiento del mercado. En particular, estos supuestos asumen que el mercado del activo subyacente a la opción es perfectamente líquido, es decir, se da por hecho que los agentes pueden negociar cualquier cantidad de este activo de manera inmediata y sin afectar su precio, pero es ampliamente reconocido que los agentes consideran en sus negociaciones un riesgo por liquidez, incluso en los mercados más desarrollados y profundos.

En este trabajo se elimina este supuesto al considerar un modelo de mercado financiero que incorpora un factor de iliquidez que afecta a los precios de los activos riesgosos y a las estrategias de negociación de los agentes. Partiendo de un mercado conformado por tres tipos de activos: un activo libre de riesgo, un activo riesgoso y un derivado con subyacente al activo riesgoso, se describe el impacto sobre el precio del subyacente de las negociaciones ejecutadas por los agentes para replicar el derivado, esto debido a que no se asume liquidez perfecta del mercado del activo riesgoso, y se establece la ecuación diferencial parcial de valoración del derivado a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas *forward-backward*. Se obtiene como resultado una extensión no lineal de la ecuación de valoración de Black-Scholes que incorpora el efecto de la iliquidez. Para aproximar la solución de esta ecuación se propone el uso de redes neuronales físicamente informadas (PINN por sus siglas en inglés), las cuales permiten aproximar la solución partiendo de un conjunto mínimo de da-

---

<sup>6</sup>Magíster en matemática aplicada. Universidad Externado de Colombia, Bogotá, Colombia. Correo: jhon.moreno@uexternado.edu.co

tos asociados con las condiciones iniciales, de frontera y la propia ecuación diferencial parcial.

**Palabras clave:** valoración de derivados; riesgo de liquidez; ecuación diferencial parcial no lineal de valoración; redes neuronales físicamente informadas

**Tipo de trabajo:** Ponencia

### *Introducción*

Aunque el modelo pionero de valoración de derivados desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes en 1973 [1] aún es ampliamente utilizado en la práctica financiera, son múltiples las críticas que llevan a considerarlo como no adecuado para describir los mercados reales, esto debido al conjunto de supuestos acerca del funcionamiento del mercado sobre los que está construido. Un ejemplo típico es el supuesto de liquidez perfecta del activo subyacente, en el cual se asume que los agentes pueden negociar este activo en cualquier cantidad, de manera inmediata y sin afectar su precio, pero es ampliamente reconocido que no todos los mercados son perfectamente líquidos, incluso cuando el subyacente es negociado en un mercado financiero bien establecido. De hecho, todo precio sufre del llamado riesgo de liquidez, y esta fuente de incertidumbre es considerada como uno de los riesgos más críticos en la industria financiera actual.

Si bien no se tiene un consenso sobre cómo definir la liquidez, existe una gran cantidad de investigación que se ha centrado en estudiar los efectos del riesgo de liquidez en los precios de los activos, ver por ejemplo [2] o [3], pero el desarrollo de un modelo sólido que capture adecuadamente el impacto del riesgo de liquidez en la determinación de los precios de los derivados aún está por proponer. En consecuencia, un desafío importante es comprender cómo el riesgo de liquidez influye en la fijación de precios y la cobertura de derivados.

En este trabajo se considera un mercado financiero en el cual no se asume liquidez perfecta del activo riesgoso, y se estudian los efectos que esta iliquidez tiene sobre las expresiones de valoración de los derivados financieros y las estrategias de negociación de los agentes. El documento continúa así:

### **Modelo de mercado con riesgo de iliquidez**

Consideramos un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{I}, P, (\mathcal{I}_t)_{t \in [0, T]})$  que modela la incertidumbre en la economía, donde  $P$  es una medida de probabilidad empírica o de mercado y  $T$  un horizonte de tiempo finito. Se asume que todos los procesos involucrados son adaptados a la filtración. El mercado está conformado por:

Un activo sin riesgo con valor en  $t$  denotado por  $B(t)$ , asociado a una tasa de interés  $r > 0$  constante y conocida. La dinámica del precio de este activo es descrita por la ecuación diferencial ordinaria:

#### **Ecuación 3. Dinámica del precio del activo**

$$dB(t) = rB(t)dt ; t \in [0, T]$$

Un activo riesgoso con valor en  $t$  denotado por  $S(t)$ , cuya dinámica es caracterizada por la ecuación diferencial estocástica:

#### **Ecuación 4. Ecuación diferencial estocástica .**

$$dS(t) = \alpha S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) + \lambda(t, S(t)) S(t) dN(t)$$

Donde:  $\alpha$  es una constante que representa la tasa de rentabilidad instantánea esperada de este activo,  $\sigma > 0$  es una constante que representa su volatilidad instantánea,  $W(t)$  es un movimiento browniano estándar definido sobre el espacio de probabilidad considerado,  $\lambda \equiv \lambda(t, S(t)) > 0$  es el término que representa la iliquidez del mercado en el instante  $t$  y  $N(t)$  es el proceso que describe el número de unidades del activo que posee un agente en el instante  $t$ .

Si  $\lambda = 0$ , es decir, si el mercado es perfectamente líquido, la ecuación del precio se reduce a la expresión diferencial estocástica de un movimiento browniano geométrico, como en el clásico modelo de Black-Scholes. El término  $\lambda S(t) dN(t)$  en la ecuación de los precios describe el impacto que tiene sobre su dinámica la estrategia de negociación del agente y el factor de la iliquidez. Si  $dN(t) > 0$ , es decir, si el agente adquiere el activo, empuja el precio al alza en una cantidad que está ponderada por el factor de iliquidez del mercado. Por el contrario, si  $dN(t) < 0$ , es decir, si el agente vende el activo, empuja el precio a la baja en una cantidad que está ponderada por el factor de iliquidez.

Un derivado financiero pactado sobre el activo riesgoso, con valor en el instante  $t$ , es denotado por  $h(t, S(t))$  y cuyo valor en  $T$  es  $h(T, S(T)) = \Phi(S(T))$ , donde  $\Phi(S(T))$  es la función que describe los posibles pagos del derivado al vencimiento.

Además de estos activos, se consideran las dinámicas de la estrategia de negociación del agente y su proceso de riqueza.

La estrategia de negociación del agente es descrita por el número de unidades que posee del activo riesgoso en el instante  $t$ , el cual es denotado por  $N(t)$ . En el modelo clásico se considera que, una vez el agente establece la cantidad inicial de unidades en las que toma posición, continúa negociando el activo de acuerdo con un proceso de Itô. En este caso, asumiremos que el proceso  $N(t)$  satisface la ecuación diferencial estocástica:

### **Ecuación 5. Ecuación diferencial estocástica**

$$dN(t) = \eta(\theta - N(t))dt + \gamma dW(t)$$

Es decir, la estrategia de negociación del agente sigue un proceso de reversión a la media, donde  $\eta$  es una constante que representa la velocidad de reversión,  $\theta$  es una constante que representa el número de unidades del activo que el agente posee en el largo plazo,  $\gamma > 0$  es una constante que representa la volatilidad instantánea asociada al cambio en el número de unidades y  $W(t)$  es el mismo movimiento browniano estándar (fuente de aleatoriedad) asociado al precio del activo.

La selección de un proceso de reversión a la media para describir la estrategia de negociación de los agentes es novedosa en la literatura, y permite incorporar elementos considerados de forma separada en otros trabajos, como por ejemplo, el impacto permanente de la velocidad de negociación del agente en la dinámica de los precios. En esta propuesta, se considera que la velocidad de negociación es descrita por el parámetro  $\eta$  constante en la ecuación que describe la estrategia de negociación del agente.

La riqueza del agente en el instante  $t$  es denotada por  $Y(t)$  y está dada por:

**Ecuación 6. Ecuación riqueza del agente en el instante t.**

$$Y(t) = \phi(t)B(t) + N(t)S(t)$$

Donde  $\phi$  representa el monto invertido o prestado a la tasa libre de riesgo y  $N(t)$  el número de unidades del activo riesgoso. Se considera que la estrategia de negociación del agente es autofinanciada, es decir:

**Ecuación 7. Ecuación de la estrategia de negociación del agente en el instante t.**

$$dY(t) = \phi(t)dB(t) + N(t)dS(t)$$

Lo que garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje en el mercado.

***Dinámica del precio de activos y valoración***

Considerando estos elementos del modelo de mercado, se tiene la siguiente proposición que resume los resultados principales para las dinámicas de los precios y el derivado en relación con la estrategia de negociación del agente y el factor de iliquidez del mercado.

Proposición: en un modelo de mercado en tiempo continuo, caracterizado por el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas *forward-backward*, se tiene lo siguiente:

**Ecuación 8. Sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas *forward-backward*.**

$$dB(t) = rB(t)dt ; B(0) = B_0$$

$$dN(t) = \eta(\theta - N(t))dt + \gamma dW(t) ; N(0) = N_0$$

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + \lambda(t, S(t))S(t)dN(t) ; S(0) = S_0 > 0$$

$$dY(t) = \{Y(t)r - S(t)N(t)r + N(t)S(t)[\alpha + \lambda\eta(\theta - N(t))]\}dt + N(t)S(t)(\sigma + \lambda\gamma)dW(t) ; Y(T) = h(S(T))$$

La ecuación diferencial parcial de valoración es:

$$h_t + rS(t)h_S + \frac{1}{2}S^2(t) \left( \frac{\sigma}{1 - S(t)h_{SS}\lambda} \right)^2 h_{SS} - rh = 0$$

Y la dinámica del precio del activo subyacente (riesgoso) satisface:

$$dS(t) = \hat{\alpha}S(t)dt + \hat{\sigma}S(t)dW(t)$$

Donde:

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha + \lambda h_{St}}{1 - S(t)h_{SS}\lambda} + \frac{\lambda S^2(t)\sigma^2 h_{SSS}}{2(1 - S(t)h_{SS}\lambda)^3}$$

Y

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - S(t)h_{SS}\lambda}$$

Si  $\lambda(t, S(t))=0$ , es decir, si el mercado es perfectamente líquido, se tiene que:  $\hat{\alpha}=\alpha$ ,  $\hat{\sigma}=\sigma$  y la ecuación diferencial parcial de valoración se reduce a la del modelo Black-Scholes.

### **Conclusión y discusión**

Se considera un modelo de mercado en tiempo continuo con iliquidez en el activo riesgoso, que es el activo subyacente al derivado disponible en el mercado. Bajo este marco, se modela la estrategia de negociación de los agentes y el efecto que esta tiene sobre los precios de los activos y los derivados debido a la iliquidez del mercado. Se establece la ecuación diferencial parcial no lineal de valoración correspondiente.

Se propone mostrar los detalles de estos resultados durante la presentación del evento, así como discutir la aplicación de redes neuronales físicamente informadas para resolver la ecuación de valoración obtenida.

### **Bibliografía**

[1] F. Black y M. Scholes, “*The pricing of options and corporate liabilities*”, J. Polit. Econ., vol. 81, no. 3, pp. 637-654, jun., 1973.

[2] V. Acharya y V. Pedersen, “*Asset pricing with liquidity risk*”, J. Financ. Econ., vol. 77, no. 2, pp. 375-410, ago., 2005, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2004.06.00>

[3] W. Liu, “*A liquidity-augmented capital asset pricing model*”, J. Financ. Econ., vol. 82, no. 3, pp. 631-671, dic., 2006, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2005.10.001>

## Conceptos económicos en el aula de matemáticas y estadística, experiencias de estudiantes de economía en la Universidad Católica de Colombia

Melo Casas Angie Rocio<sup>7</sup>, Rodríguez Fonseca Norvey<sup>8</sup>

### Resumen

En este trabajo se expone la estrategia del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Católica de Colombia, en cuanto a su práctica docente, para incorporar características mixtas de métodos del modelo constructivista, como el aprendizaje basado en proyectos y el aprendizaje basado en problemas, con miras a la articulación con los resultados y a la evaluación de los resultados de aprendizaje. Se presentan algunos casos de trabajos construidos por estudiantes del programa de economía, en donde logran incorporar elementos de herramientas matemáticas en el estudio de contextos de situaciones de las ciencias económicas. Se discuten las limitantes y riesgos que conlleva el desarrollo del currículo como se ha planteado en este trabajo.

**Palabras clave:** aprendizaje basado en problemas; aprendizaje basado en proyectos; herramientas matemáticas; conceptos económicos

**Tipo de trabajo:** Ponencia

### Introducción

Existe una innegable y robusta relación entre la economía y las matemáticas, ya que la segunda ofrece todas las herramientas cuantitativas para estructurar algunos de los conceptos básicos de la economía, le sirve de esqueleto y andamiaje para que la economía se valga de estos instrumentos en la construcción y desarrollo de sus propias teorías. Sin embargo, para los profesionales en formación, especialmente en los cursos de fundamentación

---

<sup>7</sup>Magíster en ciencias: matemáticas, matemática. Universidad Católica de Colombia. Bogotá, Colombia. Correo: armelo@ucatolica.edu.co

<sup>8</sup>Magíster en investigación operativa y estadística. Universidad Católica de Colombia. Bogotá, Colombia. Correo: nrodriguez@ucatolica.edu.co

en la primera fase de sus estudios universitarios, esta relación no es evidente o no la consideran profunda; de hecho, en la mayoría de los casos, los estudiantes consideran que hay una ruptura entre los conceptos de las matemáticas que aprenden en el aula y la forma en que las aplican en su quehacer profesional. En algunos casos, pareciera que hay una separación entre su actividad en el aula y el desarrollo de sus habilidades matemáticas en su realidad profesional; como si las matemáticas fueran un bloque de conocimientos aislados en su programa académico. A veces, los estudiantes lo ven solamente como un requisito más de graduación. En respuesta a esta problemática, el Departamento de Ciencias Básicas ha desarrollado, dentro de las asignaturas que ofrece al programa de economía, una combinación de algunas características de diferentes métodos pedagógicos para unificar una cátedra adecuada para los estudiantes de economía; esto con el fin de construir un puente que les permita poner en acción los conceptos del aula en situaciones de su propia realidad. Por su parte, los currículos en las universidades colombianas están atravesando por la transformación de sus prácticas académicas hacia la implementación y evaluación de resultados de aprendizaje, un proceso en el que se ha considerado apropiado el trabajo desarrollado en los programas de los cursos, como un indicador del grado de relevancia que los estudiantes encuentran en la vinculación de las matemáticas en el aprendizaje de los conceptos económicos.

### ***Métodos e instrumentos empleados***

Tradicionalmente, la cátedra universitaria colombiana se ha caracterizado por tener al maestro como el principal actor en el proceso de enseñanza, con un desarrollo basado en los contenidos de la asignatura en particular que se imparte; en este sentido, el estudiante ha tenido un rol pasivo en su proceso de aprendizaje. El modelo constructivista, muy por el contrario, plantea la posibilidad de que el estudiante sea el protagonista de su propio aprendizaje; dentro de este modelo podemos encontrar el aprendizaje basado en proyectos (ABPrj), y el aprendizaje basado en problemas (ABPrb), que, aunque comparten ciertas características, tienen también importantes diferencias. Veamos una corta caracterización de la experiencia que se nutre en el aula de matemáticas de la Universidad Católica de Colombia.

El aprendizaje basado en proyectos (ABPry) parte de una pregunta concreta que el estudiante debe responder mediante el diseño, construcción y ejecución de un proyecto, con el fin de entregar un producto final como resultado de su trabajo. El alumno determina la estructuración de su proyecto, escoge las estrategias de investigación y la metodología para desarrollarlo [1]. Es importante que el proyecto esté centrado en el estudiante, en sus intereses y necesidades, para que despierte su curiosidad [2]. Por su parte, el trabajo colaborativo juega un papel fundamental, ya que el estudiante debe ser capaz de gestionar las tareas dentro de su grupo de trabajo, asignar funciones y roles a cada uno de los integrantes y articular el trabajo de cada uno para la construcción del producto final.

El aprendizaje basado en problemas (ABPrb) es un método que busca valerse de casos como inicio del proceso de aprendizaje e integración de los nuevos conocimientos. Una vez planteados estos problemas con el acompañamiento de un tutor, los estudiantes deben encaminar su propio proceso de aprendizaje [3]. Este método está orientado a la solución de problemas que el profesor ha preseleccionado o diseñado para lograr ciertos objetivos de aprendizaje, toda la actividad se desarrolla en torno a la discusión de un problema y el aprendizaje es una consecuencia de la experiencia de trabajar sobre dicho problema, esto contribuye en la autogestión del aprendizaje, enfrentando a los estudiantes a situaciones en contextos. Los alumnos tienen además la posibilidad de observar en la práctica una aplicación de lo que están aprendiendo en torno al problema. La transferencia pasiva de información se elimina en el ABP [4].

Aunque estos dos métodos están enfocados en el estudiante como el gestor principal del aprendizaje, y ambos confrontan al alumno con situaciones reales del contexto en el que se desenvuelve, también mantienen ciertas diferencias. La principal de ellas es que, mientras el aprendizaje basado en problemas está enfocado al proceso propio de aprendizaje, el basado en proyectos requiere que el estudiante articule un proyecto para que entregue un producto final [5]. En el ABPrb, el estudiante debe enfocarse en un problema particular que su profesor le provee, que ha sido elegido o diseñado con un fin específico para el desarrollo de un concepto en particular; mientras que, por su parte, en el ABPry, el estudiante

desarrolla un proyecto que puede tener modificaciones a lo largo de su desarrollo, tanto en lo metodológico como en lo conceptual, y en muchos casos su objeto o tema de investigación puede o debe ser elegido por el mismo grupo de trabajo.

En cuanto a la unificación de estrategias para el desarrollo de la clase, en el caso que extendemos en este trabajo, se han incorporado algunas características de ambos métodos, ya que cada uno atiende a habilidades diferentes en el proceso de aprendizaje. En una parte del contenido del curso, el estudiante es provisto por un conjunto de ejercicios y problemas en situaciones de contexto al inicio de cada corte o bloque temático, con el fin de motivar el proceso de aprendizaje de un tema o conjunto de temas específicos. Estos problemas son resueltos por los estudiantes a lo largo del desarrollo de los temas y están directamente relacionados con conceptos propios de la economía que se desglosan, buscando que el estudiante explore sus habilidades de reconocimiento de variables a partir de un contexto, la interdependencia entre ellas, las condiciones iniciales de un problema, el análisis de datos y gráficas, inferencias, toma de decisiones, entre otras. Este tipo de problemas los acercan a utilizar herramientas de las matemáticas en el modelamiento de los conceptos económicos, con el fin de resolver un problema o caso en específico, por lo tanto, representan el entrelazamiento que se espera entre los aprendizajes propios de su profesión y el uso de las herramientas que las matemáticas y la estadística les ofrecen.

Otro de los componentes en las actividades de los cursos es el trabajo aplicado, que no se rige estrictamente por los principios del ABpry, pero que sí reúne varias de sus características. Aunque es una actividad que ha sido desarrollada por varios años en el Departamento de Ciencias Básicas, desde el año 2019 se ha enfocado en trabajar alrededor de los Objetivos de Desarrollo Sostenible como sus ejes principales de investigación, basado en la firme convicción de que la academia puede aportar soluciones a los problemas de las sociedades actuales desde la misma realidad de los estudiantes. En cada caso, el estudiante debe identificar un problema de su entorno, se puede solucionar desde la formación profesional y aplicando los conocimientos relacionados con las ciencias básicas. En la medida de lo posible, el estudiante debe elegir un tema que articule varias de las asignaturas que cursan con el

departamento (matemáticas o estadística). Planteado el problema, se debe formular y estructurar el proyecto con cada una de las etapas y componentes determinados para cada fase de su desarrollo y acordes con lo que evalúa la rúbrica de evaluación de cada fase. Es indispensable que el maestro oriente el proceso desarrollado por cada grupo de trabajo, ya que la viabilidad de cada proyecto se puede ver afectada por las limitaciones técnicas, conceptuales, temporales o financieras de los participantes. Esta actividad promueve no solo habilidades similares a las logradas en el ABPrb, sino que adicionalmente fomenta el pensamiento científico, las habilidades investigativas y la autogestión del aprendizaje. Adicionalmente, le proporciona al estudiante un tipo de pensamiento más estructurado y lo confronta con problemas que él mismo ha identificado y propuesto, y que puede solucionar con los medios que tiene a su alcance.

### **Resultados**

Cabe aclarar que la actividad del trabajo aplicado es transversal a todas las asignaturas ofrecidas por el Departamento de Ciencias Básicas a otras facultades como la de ingeniería y psicología. Sin embargo, como producto de este proceso, podemos mencionar y remarcar algunas experiencias de proyectos desarrollados por los grupos de estudiantes que cursan matemáticas y estadística para los programas de economía y administración de empresas:

Nombre del proyecto: análisis y comparación de estrategias de restauración de áreas deforestadas para la ciudad de Bogotá y Guadalajara a partir de operaciones matriciales.

Este trabajo, en el marco de los proyectos de colaboración COIL, hace un análisis de la deforestación y del riesgo de incendios forestales que afectan a las zonas boscosas, estudiando la asignación de recursos financieros a la mitigación del problema y haciendo un comparativo entre la ciudad de Bogotá (Colombia) y Guadalajara (México). Utilizan programación lineal como modelo matemático para un problema de factibilidad de asignación de recursos.

El modelo planteado en hectáreas y dólares es:

$Z$ = función de costos totales por proyecto que se quiere maximizar: USD por hora para el proyecto 1 y 2, maximizando las hectáreas que se pueden abordar.

$x$  = cantidad de áreas restauradas por el proyecto *Wildfire Analyst*.

$Y$  = cantidad de áreas restauradas por el proyecto drones contra incendios.

Bogotá	Guadalajara
$Z = 349.736,583 x + 3,473131222 y$ $12.675 x + 1.000 y \leq 177.500$ $1,9 x + 16 y \leq 54,06$ $x, y, \geq 0$	$Z = 349.736,583 x + 3,473131222 y$ $12.675 x + 1.000 y \leq 18.790$ $1,9 x + 16 y \leq 77.625,175$ $x, y, \geq 0$

Fuente: elaboración propia.

Resultados obtenidos por el grupo de trabajo: los drones contra incendios es un proyecto óptimo para Bogotá de acuerdo con los resultados, pero la altitud de la ciudad reduce el riesgo de incendios, así que no se requiere de un proyecto especializado para monitorear y controlar el fuego. La solución óptima para restaurar áreas deforestadas en Guadalajara es el proyecto *Wildfire Analyst*, ya que este maximiza los beneficios en costos para el monitoreo y la restauración por hectárea. Es importante destacar su clima seco y caliente, además de su altitud de casi 1000 msnm por debajo de Bogotá. Esta situación implica una mayor probabilidad de incendios forestales y, tal como lo indican los datos, sí afecta distintivamente en comparación con Bogotá.

Nombre del proyecto: estudio de la distribución de los ingresos de los estudiantes de la Universidad Católica de Colombia.

Este proyecto recolecta información de una muestra de sesenta estudiantes del programa de economía e indaga por el salario mensual devengado por cada uno de ellos, construyen una tabla de acumulaciones porcentuales y utilizan una regresión polinómica para establecer una curva de Lorenz. Finalmente, con esta última, calculan el coeficiente de Gini para hallar el nivel de desigualdad en la distribución en los ingresos devengados por la población estudiada.

La función de Lorenz para este caso se aproximó como  $f(x)=0,4623x^2+0,5097x+0,009$ , con un coeficiente  $R^2=0,99$ . El índice de Gini se calculó mediante la integral:

### Ecuación 9. Índice de Gini

$$iG = 2 \int_0^1 (x - 0,4623x^2 - 0,5097x - 0,009) dx = 0.1641$$

Resultados obtenidos por el grupo de trabajo: el coeficiente de Gini es una cantidad que varía entre 0 y 1, y cuanto más pequeña sea, indica que la distribución del ingreso obtenido por la población estudiada es equitativa; mientras que, al acercarse a 1, indica que la mayor parte del ingreso se acumula en el bajo porcentaje de la población con mayores ingresos. El resultado de los estudiantes encuestados muestra un índice de Gini de 0,1641 que, al ser una cantidad pequeña, determina que la distribución de los ingresos de los estudiantes está distribuida de forma mayormente equitativa.

### Conclusiones

El modelo constructivista ofrece una gran variedad de métodos y estrategias de enseñanza-aprendizaje que representan grandes ventajas en la formación del profesional competitivo, con una fuerte y amplia formación en el uso de herramientas matemáticas en el quehacer del profesional en economía o administración de empresas (en nuestro caso). Una de sus cualidades, que resulta ser ventajosa, es su flexibilidad, ya que una y otra se pueden ver complementadas en el desarrollo del proceso de aprendizaje del estudiante, fomentando diversas habilidades desde las variaciones que presentan una respecto de la otra. En el caso del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Católica de Colombia, combinar las características del ABPrb y el ABPrv ha representado el vínculo que conecta a las matemáticas y la economía desde lo conceptual, pero sobre todo desde la motivación de las aplicaciones prácticas propias de las áreas económicas y administrativas. Las características del ABPrb ayudan al estudiante a aproximarse a situaciones en contextos específicos, y se enfocan en fortalecer el proceso del aprendizaje en sus etapas primarias, mientras que el ABPrv desarrolla sus habilidades con miras a obtener resultados finales, interpretar datos, hacer inferencias, entre otros. Esto, junto con la transición a los resultados de aprendizaje, parecieran ser una estrategia natural para que el enfoque de la cátedra universitaria cambie de estar centrada en contenidos que el estudiante almacena a explorar las capacidades del “aprender para sa-

ber hacer”, lo que, en nuestra perspectiva, lo encamina a formarse como un profesional competente, que se ha aproximado al que-hacer de su profesión desde la perspectiva del uso efectivo de las matemáticas en su área de conocimiento.

Lo observado de los estudiantes con mejores resultados de estas prácticas revela en ellos una amplia capacidad de interrelación entre el conocimiento adquirido, es decir, no solo es notoria su habilidad de utilizar las herramientas conceptuales alcanzadas durante el desarrollo del curso, como por ejemplo incorporar métodos estadísticos con procesos matemáticos para hacer cálculos sobre determinadas funciones, sino también su destreza de articularlas con temas de otras asignaturas propias de su programa, como por ejemplo con la creación de índices económicos, o con la distribución de recursos bajo restricciones de presupuestos. Este tipo de resultados no siempre se obtienen cuando la práctica docente se ciñe a los métodos tradicionales, donde el estudiante es un espectador que está enfocado en obtener conocimiento de los contenidos del curso.

### *Discusión*

La forma en la que las prácticas docentes sugeridas en el Departamento de Ciencias Básicas se desarrollan en la cátedra, propiamente dentro del aula, si bien proporcionan todas las ventajas ya expuestas, también representa ciertos retos en varios aspectos. El primero de ellos es la disposición del espacio dentro del currículo para esta actividad, ya que demanda tiempo adicional dentro del aula al ser una actividad de interrelación entre los estudiantes y de los estudiantes con su maestro; esto implica que la proyección del desarrollo de todo el curso debe considerar una cantidad considerable de su disponibilidad para la elaboración de las actividades que se han incorporado a este tipo de estrategia. También, se necesita personal docente capacitado en temas tanto matemáticos y estadísticos como económicos y administrativos, y que posea las habilidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes a través de esta estrategia. Este aspecto es fundamental, ya que un maestro que no tenga un panorama global de los conceptos por utilizar puede repercutir en el enfoque y orientación que se dé tanto a los proyectos como a los problemas de contextos. Otro aspecto esencial es la comunicación entre los estudiantes del mis-

mo grupo, y con su docente, pues los canales que no tienen una comunicación clara y asertiva pueden generar que la práctica no sea motivadora para el estudiante, y se convierta en una adición a sus actividades evaluativas dentro de su currículo, perdiendo sus intenciones primordiales.

### **Bibliografía**

[1] A. M. Botella y P. Ramos Ramos, “Investigación-acción y aprendizaje basado en proyectos. Una revisión bibliográfica”, *Perfiles educativos*, vol. 41, no. 163, pp. 127-141, 2019.

[2] A. García-Valcárcel Muñoz-Repiso y V. Basilotta Gómez-Pablos, “Aprendizaje basado en proyectos (ABP): evaluación desde la perspectiva de alumnos de Educación Primaria”, *Revista de Investigación Educativa*, vol. 35, no. 1, pp. 113-131, 2017, DOI: <http://dx.doi.org/10.6018/rie.35.1.246811>

[3] P. Morales Bueno y V. Landa Fitzgerald, “Aprendizaje basado en problemas”, *Theoria*, vol. 13, pp. 145-157, 2004.

[4] C. A. Poot-Delgado, “Retos del aprendizaje basado en problemas”, *Enseñanza e investigación en psicología*, vol. 18, no. 2, pp. 307-314, 2013.

[5] D. Kokotsaki, V. Menzies y A. Wiggins, “Project-Based Learning: A review of the literature”, *Improving Schools*, vol. 3, no. 19, pp. 267-277, 2016.

## Propuesta de modelo matemático para la medición de la permanencia de los estudiantes de la UTS: Data 2022

Ospina G. Cyndi<sup>9</sup>, Montes V. Efrén<sup>10</sup>, Bautista O. Germán<sup>11</sup>, Arenas N. Isnardo<sup>12</sup>, Sepúlveda A. Leonid<sup>13</sup>

### Resumen

En muchos de los casos, los estudiantes universitarios abandonan sus estudios de pregrado o tardan más tiempo de lo esperado para culminar su programa y, debido a esto, las instituciones de educación superior en Colombia se enfrentan a retos y desafíos para mejorar el ingreso y permanencia de sus estudiantes, aumentando la cobertura con respecto a la graduación oportuna (ver [1]). En este contexto, presentamos un modelo matemático de simulación discreta, que describe el tránsito de los estudiantes en el primer ciclo propedéutico de los programas académicos de las Unidades Tecnológicas de Santander (UTS) usando datos del año 2022. El modelo establece una proyección sobre el número de estudiantes que culmina su programa en un periodo determinado, así como el tiempo promedio que les tomará finalizarla. Las proyecciones permitirán ejecutar acciones de prevención, análisis de deserción y repitencia en la institución, así como estudiar la tasa de graduación de sus estudiantes y evaluar el impacto de políticas académicas para generar acciones que conduzcan a elevar los

---

<sup>9</sup>Magíster en ciencias económicas, licenciada en matemáticas. Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia. Correo: cyndi.ospina@unimilitar.edu.co

<sup>10</sup>Magíster en educación, especialización en equipo electromédico, especialización en docencia universitaria, ingeniero electrónico, electricidad y telefonía, electrónica. Unidades Tecnológicas de Santander, Santander, Colombia. Correo: emontes@correo.uts.edu.co

<sup>11</sup>Maestría en gestión de la tecnología educativa. Unidades Tecnológicas de Santander. Santander, Colombia. Correo: gbautista@correo.uts.edu.co

<sup>12</sup>Doctorado en matemáticas, maestría en matemáticas aplicadas, licenciatura en matemáticas. Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia. Correo: isnardo.arenas@unimilitar.edu.co

<sup>13</sup>Doctor en matemáticas. Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia. Correo: leonid.sepulveda@unimilitar.edu.co

estándares de alta calidad y minimice los índices de permanencia y repitencia de estudiantes en su vida académica.

**Palabras clave:** modelo; simulación; variable discreta; permanencia

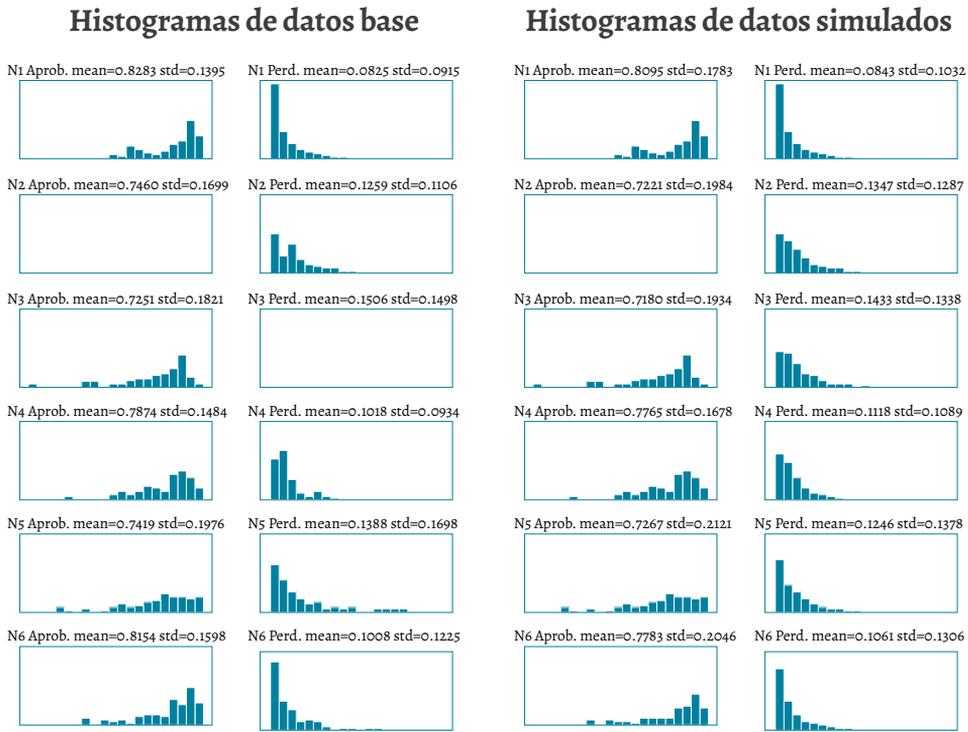
**Tipo de trabajo:** Ponencia

### *Introducción*

Los modelos y simulaciones discretas son herramientas utilizadas para estudiar la dinámica de sistemas complejos y se caracterizan por tener procesos y eventos que ocurren en intervalos de tiempo discretos (ver [2]). En [2], [3] y [4] existen aplicaciones de este tipo de simuladores que muestran predicciones del comportamiento y del desempeño de procesos en el mundo real bajo la influencia de eventos que ocurren a lo largo de un tiempo, y que perturban el estado de un sistema. Nuestro modelo está ajustado a la información obtenida de los cursos de cada nivel de la UTS: políticas académicas respecto a la cantidad de veces que se puede repetir un curso y la cantidad de estudiantes que aprueban, pierden o cancelan las asignaturas. Es decir, fueron empleados los datos de pérdida, aprobación y cancelación de cada una de las asignaturas ofertadas y en el nivel que se ofrecen cada una de ellas. Además, se incluyeron las políticas académicas que indican el estatus regular del estudiante y las normas por las que un estudiante puede quedar por fuera de la institución (PFI) según el reglamento estudiantil vigente en 2022. En este caso, un estudiante culminaría su primer ciclo propedéutico en seis semestres y quedaría PFI cuando no logra un promedio acumulado superior a 2,8. Después, iniciamos con el análisis descriptivo por nivel, que serviría de insumo para las observaciones subsiguientes.

Los histogramas que muestran el comportamiento de los datos, junto con la media y desviaciones, se muestran en paralelo con los histogramas de los datos luego de realizada la simulación:

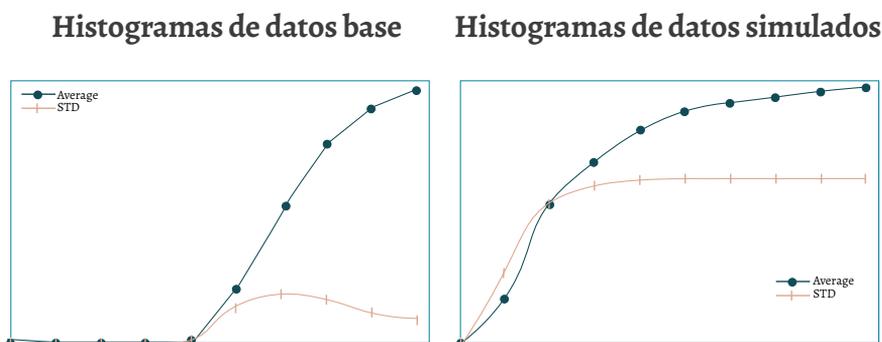
**Figura 1: Histogramas de datos normalizados como distribución de probabilidad**



Fuente: elaboración propia.

Analizando la figura 1, se evidencia la similitud en la tendencia de los datos originales (lado izquierdo) con los datos generados numéricamente por las simulaciones (lado derecho). La importancia de este primer estudio era establecer esa similitud, y que proyectara en la misma dimensión la tendencia de los datos originales, manteniendo lo más cercano posible la dispersión y media.

**Figura 2: Resultados del promedio y de la desviación estándar para las simulaciones**



Fuente: elaboración propia.

La figura 2 muestra que, en los primeros cinco semestres, ningún estudiante se ha graduado, esto coincide con el tiempo mínimo para culminar el primer ciclo propedéutico. Del total esperado en el sexto semestre, cerca del 20 % culminaría su primer ciclo propedéutico oportunamente. Adicional a este resultado, también hasta el octavo semestre alcanzarían a graduarse cerca de un 70 % de los estudiantes. La dispersión máxima se encuentra por debajo del 20 % y, conforme aumenta el número de semestres, la dispersión va disminuyendo, tendiendo al 9 %.

Por otra parte, el modelo muestra que, en el tercer semestre, alrededor del 5 % de los estudiantes están PFI. En los semestres siguientes se mantiene un incremento relativamente constante, hasta llegar a menos del 9 % en el décimo semestre. La desviación se mantiene constante a partir del cuarto semestre, con un valor cercano al 6 %.

En perspectiva, los resultados obtenidos por este modelo pueden ayudar a las UTS a volver a analizar sus políticas académicas y a promover proyectos para establecer estrategias pedagógicas y actividades extracurriculares orientadas a mejorar las tasas de retención y de graduación de estudiantes en el primer ciclo propedéutico. Permitirá además identificar los semestres en los que los estudiantes requieren más atención, así mismo, podrán ofrecer a los estudiantes información completa sobre qué porcentaje de estudiantes que culminan a tiempo su primer ciclo propedéutico.

A futuro, con unos datos más robustos, este modelo puede emplearse con un análisis más específico sobre asignaturas, prerrequisitos, entre otros, buscando que los estudiantes sean atendidos a tiempo, logrando así que las UTS continúen formando personas con sentido ético, pensamiento crítico y actitud emprendedora, mediante procesos de calidad en la docencia, la investigación y la extensión, contribuyendo al desarrollo socioeconómico, científico, tecnológico, ambiental y cultural de la sociedad [5].

### ***Bibliografía***

[1] L. García Botero, A. J. Aguilar Barreto, and A. E. Parada Trujillo, “*Deserción Universitaria en el Contexto Colombiano: Recorrido Diacrónico entre el 2018 y 2022*”, Revista Senderos Pedagógicos, vol. 13, no. 13, Jun. 2022.

[2] J. Banks, Discrete-event system simulation. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2010.

[3] M. H. Nili, H. Taghaddos, and B. Zahraie, “*Integrating discrete event simulation and genetic algorithm optimization for Bridge Maintenance Planning*”, Automation in Construction, vol. 122, p. 103513, Dec. 2020.

[4] J. I. Vázquez-Serrano, R. E. Peimbert-García, and L. E. Cárdenas-Barrón, “*Discrete-event simulation modeling in Health-care: A comprehensive review*”, International Journal of Environmental Research and Public Health, vol. 18, no. 22, p. 12262, Nov. 2021.

[5] Unidades Tecnológicas de Santander - UTS, “*Proyecto Educativo Institucional -PEI-*”, Bucaramanga, 2020.

## Guerra, política y ecuaciones: incidencia del gasto público sobre la tasa de criminalidad en los estados de México

Martínez C. Javier Esteban<sup>14</sup>, Romero R. María Isabe<sup>15</sup>, Ospina G. Cyndi Julieth<sup>16</sup>

### Resumen

Sun Tzu dice: “la guerra es de vital importancia para el Estado; es el dominio de la vida o de la muerte, el camino hacia la supervivencia o la pérdida del Imperio: es forzoso manejarla bien. No reflexionar seriamente sobre todo lo que le concierne es dar prueba de una culpable indiferencia en lo que respecta a la conservación o pérdida de lo que nos es más querido; y ello no debe ocurrir entre nosotros” [1]. En esta ponencia, se muestra la aplicación de las ecuaciones diferenciales en un modelo de batalla y cómo, si este se contextualiza en la lucha de un gobierno contra la delincuencia, pudiera ayudar a determinar políticas gubernamentales que favorezcan una óptima aplicación del gasto público. Mostraremos un ejemplo de cómo podemos usar un modelo predictivo basado en ecuaciones diferenciales poblacionales en la lucha contra la delincuencia.

**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales; delincuencia; políticas gubernamentales

**Tipo de trabajo:** Ponencia

### Introducción

Basados en las ideas expuestas por el economista Mark A. R. Kleiman [2], las preguntas con las que iniciamos son: cuando el

---

<sup>14</sup>Estudiante de economía. Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia. Correo: est.javier.martinez@unimilitar.edu.co

<sup>15</sup>Doctorado en matemáticas, maestría en matemáticas, especialización en matemática aplicada. Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia. Correo: maria.romeror@unimilitar.edu.co

<sup>16</sup>Magíster en ciencias económicas, licenciada en matemáticas. Universidad Militar Nueva Granada, Cajicá, Colombia. Correo: cyndi.ospina@unimilitar.edu.co

uso de la fuerza falla en contra de una situación de criminalidad, ¿no se usó suficiente?, y ¿existe una alternativa al uso de la fuerza?

Kleiman afirma que: “existen razones para pensar que sí, y piezas de este enfoque pueden ser vistos al trabajar en distintos lugares repartidos por todo el mundo que dan cuenta en la lucha contra la delincuencia” [2].

Si pensamos en el crimen como algo malo que le ocurre a las personas, o como un problema de política interna, podemos comenzar a preguntarnos cómo limitar el daño del crimen con el menor costo posible, tanto en gasto de dinero como en sufrimiento infligido.

Intentar moverse de un alto índice de criminalidad a un índice de criminalidad bajo puede lograrse sumando capacidad de fuerzas armadas para controlar al mayor número de delincuentes de una manera decisiva. Cuando la tasa de criminalidad ya es baja, tiende a automantenerse, y por tanto, podría llegar a no ser necesario mantener la capacidad de fuerza adicional para siempre. El reto es encontrar, aun temporalmente, la suficiente capacidad de fuerza para tener bajo control la oleada de criminalidad.

Para determinar de una manera teórica los niveles adecuados de fuerza que se requieren para controlar la delincuencia, nos basaremos en los modelos poblacionales. Asumimos que la cantidad de delincuentes empieza a crecer. Supongamos, además, que todo esto es debido a un sistema judicial débil, a bajos controles de seguridad, a una escasez de fuerza pública, etc. Esta primera situación puede ser representada por una ecuación de tipo exponencial.

Entonces, puede suceder que a medida que el número de delincuentes aumente, también comience a aumentar la violencia que unos delincuentes ejercen sobre otros, por lo que la cantidad de delincuentes comienza a ser regulada por ellos mismos. Este nuevo panorama supone que la manera en que se regula la cantidad de delincuentes es proporcional  $a(a - bx)$ ,  $a, b > 0$ .

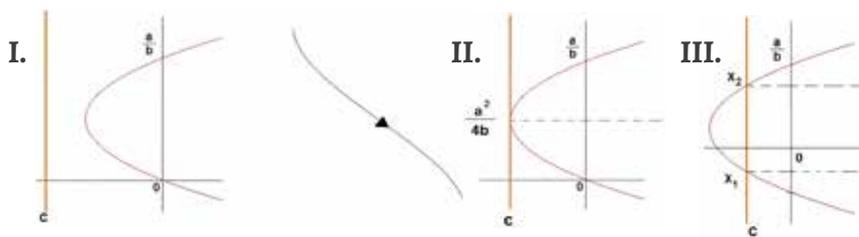
$a - bx$  es una función lineal decreciente; lo cual implica que los delincuentes se están controlando entre ellos mismos. Si  $b = 0$ , entonces simplemente hay un aumento. Entre más grande sea  $b$ , más delincuentes están desapareciendo. Dado que la violencia entre delincuentes aumenta significativamente, se hace necesario el uso de la fuerza pública para controlar la cantidad de violencia

que unos criminales ejercen sobre otros. Por lo tanto, se mejora el modelo considerando un término independiente  $c$ , conocido en las ecuaciones diferenciales como un término de “cosecha fija”  $\dot{x} = (a - bx)x - c$  con  $a, b, c > 0$ , donde  $c$  representa la cantidad de fuerza pública ejercida sobre los criminales.

Nos centraremos en este último modelo. Nuestro objetivo es determinar la cantidad óptima de fuerza ejercida para controlar la cantidad de delito con el menor costo posible.

Para esto, usaremos la técnica de retrato de fase de una ecuación diferencial ordinaria para determinar qué tanta fuerza policial se debe ejercer y cuál genera menos costo al gobierno. Para ello, se consideran tres casos: el primero es un control gubernamental alto, el segundo, suficiente, y por último, uno bajo.

**Figura 3: Gráficos para el modelo con control gubernamental alto, suficiente y bajo**



Fuente: elaboración propia.

En conclusión, podemos decir que si la cantidad de fuerza de control  $c$  ejercida es alta con respecto al índice de delincuencia (Caso I), se podrá eliminar la delincuencia, en teoría, por completo. Si la recta  $c$  es tal que toca a la parábola en su vértice (Caso II), entonces hay un estado inestable, pero dicha cantidad de fuerza elimina a la delincuencia. Si la  $c$  es pequeña, tenemos dos equilibrios (Caso III). Si el dato inicial (en nuestro ejemplo, el índice de violencia) es pequeño, entonces esta cantidad de fuerza bruta permite eliminar la delincuencia, pero si el dato inicial de violencia es alto (la cantidad de delincuentes es alta), entonces lo que pasará es que la cantidad de fuerza de control ejercida no eliminará el crimen, sino que lo hará bajar tendiendo a un cierto nivel.

Por tanto, pareciera que la mejor estrategia para transformar un círculo vicioso en uno virtuoso es ejercer medidas de con-

trol altas para reducir el crimen a un nivel bajo, y luego castigar de manera certera y corta el crimen, hasta que la población de criminales transforme su comportamiento, y cada vez que vayan a cometer un delito, lo piensen dos veces.

Como conclusión a este trabajo podemos destacar:

- Lo supremo en el arte de la guerra consiste en someter al enemigo sin darle batalla.
- No hay ejemplo de una nación que se beneficie de la guerra prolongada.
- La paz como proceso debe estar precedida por un plan de acción.

### ***Bibliografía***

[1] S. Tzu, *El Arte de la Guerra*, Editorial Porrúa, 2008.

[2] M. Kleiman, *When brute force fails, how to have less crime and less punishment*, Princeton, USA: Princeton University Press, 2005.

## Perturbaciones aleatorias en un modelo tipo Gause

Sánchez Arteaga Jorge Andrés<sup>17</sup>

### Resumen

Los modelos tipo Gause son ecuaciones diferenciales no lineales que estudian la dinámica de poblaciones de individuos sometidos a interacciones de depredación, mutualismo, cooperación o mezclas de estas. En el caso determinista, existe gran variedad de literatura al respecto, sin embargo, en la contraparte estocástica aún hay muchos interrogantes. En este trabajo, se hace un estudio de la existencia de la solución, y además, se establecen condiciones suficientes para la permanencia en media y extinción de las soluciones.

**Palabras clave:** regularidad; extinción; permanencia; distribución invariante

**Tipo de trabajo:** Ponencia.

### Introducción

A mediados de la década de los veinte, un químico y estadístico estadounidense llamado Alfred Lotka propuso, inspirado en modelos de cinética química, unas ecuaciones para modelar la dinámica de las especies dentro de un ecosistema en el que hay depredadores y presas. Solo un año después, un matemático italiano llamado Vito Volterra, basándose en observaciones de la dinámica de los peces en el mar Adriático, llegó de forma independiente a ecuaciones parecidas que modelaban dinámicas similares a las descritas por Lotka. Un ejemplo simple de las ecuaciones de Lotka-Volterra se da en una dinámica poblacional con un depredador y una presa. Para un ecosistema con estas características, las ecuaciones tienen la forma siguiente:

**Ecuación 10. Ecuación dinámica poblacional.**

$$dx = (rx - axy)dt$$

$$dy = (bxy - dy)dt$$

Con  $x(0)=x_0$ ,  $y(0)=y_0$

En el caso de las ecuaciones anteriores, las variables  $x,y$  representan la cantidad de presas y depredadores en un instante  $t \geq 0$ , el parámetro  $a$  es la tasa intrínseca de natalidad de las presas y los parámetros  $a,b$  representan qué tan fuerte es la pérdida o ganancia de biomasa de cada especie de acuerdo a los encuentros entre ambas. Sin embargo, y a pesar de que estas ecuaciones describen en buena medida lo observado por Lotka y Volterra, no modelan con exactitud la dinámica de los ecosistemas de nuestro planeta, por ejemplo, si hablamos de especies que no tienen un depredador natural, como las orcas o las ballenas azules. Vemos que la cantidad de animales de estas especies no tienden a crecer exponencialmente, cosa que sí sucede cuando hacemos  $y=0$  en las ecuaciones de Lotka Volterra, en donde la solución  $x(t)$  explota cuanto  $t$  tiene al infinito. Otro inconveniente que tienen estas ecuaciones es que, al analizar sus puntos de equilibrio, vemos que el punto  $(0,0)$  es un punto inestable, esto biológicamente significa que no puede ocurrir, al mismo tiempo, una extinción de depredadores y presas, lo cual sí es posible en nuestros ecosistemas.

Por las razones descritas anteriormente, y por otras más, las ecuaciones de Lotka-Volterra han sufrido varias modificaciones con el fin de ajustarlas más a la realidad de nuestros ecosistemas. Por ejemplo, el crecimiento exponencial de las presas en ausencia de los depredadores se corrige introduciendo un término logístico en la ecuación para  $x(t)$ .

**Ecuación 11. Ecuación con término logístico.**

$$dx = \left( rx - \frac{x^2}{k} \right) - axy$$

$$dy = bxy - dy$$

Sin embargo, esto no corrige la inestabilidad del punto  $(0,0)$ . Es en este punto donde aparece la más importante modificación hecha en estas ecuaciones, y esta consiste en introducir ciertas

perturbaciones aleatorias en algunos de sus parámetros. Biológicamente, estas perturbaciones pueden modelar eventos que no son fáciles de predecir en los ecosistemas, tales como grandes sequías, inundaciones o pandemias. En el presente trabajo, estudiaremos el modelo estocástico adimensional.

### Ecuación 12. Modelo estocástico adimensional

$$dx = [x(1-x) - f(x)y]dt + \sigma_1 dB_1$$

$$dy = [\beta f(x)y - \delta y]dt + \sigma_2 dB_2$$

Con  $x(0)=x_0$ ,  $y(0)=y_0$

Donde  $B_1$  y  $B_2$  son dos movimientos brownianos independientes,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  son las intensidades de la perturbación, y la función  $f(x)$  representa la respuesta funcional de los depredadores.

Nuestro trabajo será dar condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución. Concretamente, mostraremos que las soluciones del sistema estocástico permanecen positivas con probabilidad uno y acotadas en probabilidad, también veremos en qué condiciones hay permanencia en media de las presas y extinción de los depredadores, y además, mostraremos bajo qué condiciones tanto presas como depredadores se extinguen. Por último, para el caso en que  $f(x)=x$ , mostraremos la existencia de una única distribución estacionaria para las soluciones  $x(t), y(t)$ .

### *Métodos e instrumentos empleados*

Para obtener los resultados del presente trabajo, se emplearon los métodos estándar que son normalmente usados en el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas; estos métodos consisten en hallar funciones de Lyapunov y calcular exponentes de Lyapunov. También, implementamos el teorema de comparación para ecuaciones diferenciales estocásticas para mostrar que las soluciones son acotadas en probabilidad. Por último, usamos el *software* Wolfram Mathematica para realizar diferentes simulaciones y así poder verificar los resultados obtenidos.

## *Resultados obtenidos*

Para el modelo estocástico se obtuvieron los siguientes resultados:

- Positividad de la solución
- Acotamiento en probabilidad
- Permanencia en media y extinción
- Existencia de una única distribución estacionaria

## *Conclusiones*

Podemos ver que la versión estocástica de los modelos tipo Gause se aproximan mejor a la dinámica diaria de nuestros ecosistemas. Estas perturbaciones aleatorias hacen que las soluciones de las ecuaciones diferenciales no exploten en tiempo finito e infinito. Además, vemos que es posible una extinción masiva entre presas y depredadores. Por último, mediante las simulaciones hechas, podemos observar cómo las trayectorias de las soluciones del modelo estocástico tienden a oscilar alrededor de los puntos de equilibrio de su versión estocástica.

## *Discusiones*

Quizás, una de las preguntas de mayor interés para abordar en trabajos futuros es la de la existencia de una única distribución estacionaria para el caso en el que la función  $f(x)$  es diferente de  $x$ . Las simulaciones hechas en Wolfram Mathematica muestran que, para una función  $f(x)$  positiva, acotada, localmente Lipschitz, y cuando el modelo determinista tiene un punto de equilibrio en el interior del primer cuadrante del plano cartesiano, el modelo estocástico presenta una única distribución estacionaria.

## Representación mecanicista del desarrollo económico planetario: capitalismo salvaje vs. capitalismo dona

Torres Orozco Samuel Arturo<sup>18</sup>, Hoyos Rincón Isabel Cristina<sup>19</sup>

### Resumen

El capitalismo moderno se basa en la idea de un crecimiento económico sostenido, sin embargo, los recursos del planeta son finitos. Solo se puede mantener una economía creciente por un tiempo limitado y a expensas de un consumo irracional que pone en riesgo la vida y el bienestar de las generaciones futuras. Para afrontar el cambio climático, el deterioro ambiental y el aumento de la desigualdad es necesario pensar en otras formas posibles de desarrollo planetario. En este trabajo exploramos la descripción mecanicista de dos variantes capitalistas: i) el capitalismo salvaje, que constituye un modo de desarrollo económico basado en el consumo desmedido de los recursos, y ii) el capitalismo dona, que propone un desarrollo económico sustentable, centrado en la vida y el bienestar, y limitado por un consumo racional de los recursos naturales.

**Palabras clave:** capitalismo salvaje; capitalismo dona; sistemas dinámicos; desarrollo planetario

**Tipo de trabajo:** Ponencia.

### Introducción

La explotación de los recursos naturales ha sido la respuesta de la sociedad capitalista a las altas demandas de productos de consumo. Pero el consumo no puede continuar indefinidamente, ni sobrepasar la capacidad de carga del planeta [1], [2]. La humanidad poco a poco ha ido entendiendo que mantener políticas colonialistas y extractivistas conduce a que los países sobrepasen más

<sup>18</sup>Físico. Universidad del Quindío, Armenia, Colombia. satorreso@uqvirtual.edu.co

<sup>19</sup>Doctorado en ingeniería ambiental, maestría en física, física. Universidad del Quindío, Armenia, Quindío. Correo: ichoyos@uniquindio.edu.co

rápido los límites naturales para alcanzar estándares sociales [3]. Mantener las actuales tasas de crecimiento económico nos conduciría a un agotamiento del capital ambiental que puede poner en riesgo la calidad de vida de las generaciones futuras y la sostenibilidad del planeta [4]. Tenemos una evidente tensión latente entre el desarrollo económico y sus consecuencias ambientales. Los modelos matemáticos nos ofrecen una herramienta para estudiar las relaciones dinámicas entre la población humana y los recursos naturales.

### ***Métodos e instrumentos***

Estudiamos modelos matemáticos que representan diferentes formas de interacción entre la población humana y la naturaleza. Inicialmente, consideramos dos rutas antagónicas de desarrollo planetario: capitalismo salvaje (régimen de competencia) y capitalismo dona (régimen oscilante). Estudiamos la estabilidad y el comportamiento asintótico de cada modelo haciendo un barrido de los valores posibles de los parámetros para encontrar posibilidades intermedias (ver detalles en [5]).

### ***Resultados***

El modelo del capitalismo salvaje está representado por un modelo Lotka-Volterra modificado, donde la población humana (variable  $y$ ) se relaciona con los recursos naturales (variable  $x$ ) en modo depredador-presa, así:

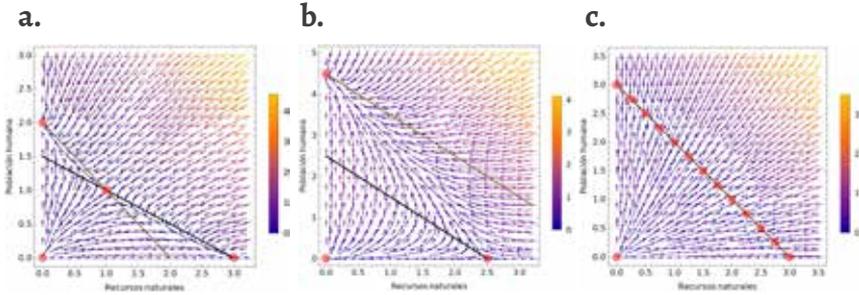
#### **Ecuación 13. Lotka-Volterra modificado.**

$$x' = ax - bx^2 - cxy$$

$$y' = dy - ey^2 - fxy$$

$a$  y  $d$  son los parámetros del crecimiento intrínseco de cada variable de estado,  $b$  y  $e$  son las tasas de decrecimiento en la interacción intraespecie, y  $c$  y  $f$  son las tasas de la interacción interespecie. En el retrato de fase podemos diferenciar tres estructuras dinámicas (ver figura 4) para diferentes valores de los parámetros, los cuales quedan definidos por las estrategias gubernamentales y conducirán a uno de los tres capitalismos: coexistencia o extinción, dominio de una variable sobre otra o estabilización.

**Figura 4: Formas de capitalismo salvaje determinadas por las restricciones en el valor de los parámetros. a) Estructuras de coexistencia o extinción. b) dominio de una variable sobre otra (la evolución del flujo converge en la aniquilación de los recursos naturales o la aniquilación de la población humana). d) estabilización.**



Fuente: elaboración propia.

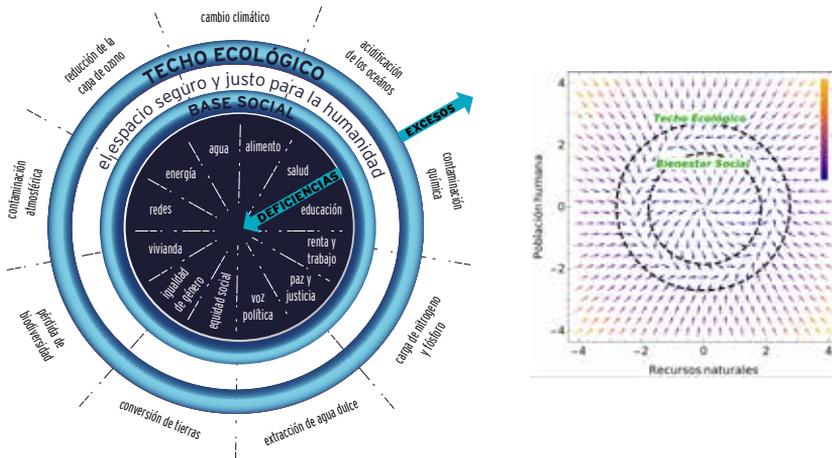
El capitalismo dona está representado por un oscilador tipo Liénard modificado, de la forma:

**Ecuación 14. Oscilador tipo Liénard modificado.**

$$\begin{aligned}
 x' &= a x - b x^3 - c x y^2 - g y \\
 y' &= d y - e y^3 - f x^2 y + g x
 \end{aligned}$$

Aquí, hemos introducido un nuevo parámetro  $g$  que cumple el papel de una tasa de regulación inducida. Este modelo ofrece una amplia variedad de estructuras con cambios topológicos y cualitativos. Sin embargo, solo hay un modo que satisface la descripción teórica del capitalismo dona con un ciclo límite que define una región de coexistencia sostenible entre el bienestar social y el techo ecológico.

**Figura 5: Al lado izquierdo, se encuentra la representación pictórica del capitalismo dona, figura tomada de [6]. Al lado derecho, aparece el diagrama de flujo que describe la economía dona**



Fuente: elaboración propia.

### Conclusiones y discusión

Las relaciones entre la población humana y la naturaleza definen la ruta de evolución del planeta y su desarrollo. En nuestro trabajo, estas relaciones se modelan como sistemas de ecuaciones acopladas, cuyo retrato de fase y estructuras asintóticas quedan definidas por el conjunto de parámetros. Los valores de estos parámetros obedecen tanto al comportamiento intrínseco de cada variable como a las acciones gubernamentales de desarrollo. En resumen, las decisiones que tomamos de manera individual y colectiva nos sitúan en una trayectoria de evolución conjunta entre humanos y naturaleza. Un consumo extremo de los recursos naturales puede conducir a una aniquilación de la población humana, pero una evolución de equilibrio dinámico entre las necesidades de las personas y las limitaciones de los recursos puede conducir a una forma más sostenible de habitar el planeta. Los modelos que estudiamos permiten situarnos en un tipo de modelo económico, ajustar los parámetros de acuerdo con las decisiones que tomamos dentro de ese modelo y explorar la trayectoria de evolución que seguiría el planeta, de manera que podamos resignificar la noción de progreso en términos del bienestar planetario.

## **Bibliografía**

[1] M. Keiner (Ed.), *The Future of Sustainability*, Netherlands: Springer, 2010.

[2] R. Costanza y L. Wainger (Eds.), *Ecological Economics: The Science and Management of Sustainability*. Columbia, USA: Columbia University Press, 1991.

[3] A. Fanning, D. O'Neill y J. Hickel, "The social shortfall and ecological overshoot of nations", *Nat. Sustain*, vol. 5, pp. 26-36, DOI: <https://doi.org/10.1038/s41893-021-00799-z>

[4] I. Mandel, *Climate Change Report IPCC 2021 – A Chimera of Science and Politics*.

[5] S. A. Torres-Orozco, *Representación Mecanicista del Desarrollo Económico Planetario: Capitalismo Salvaje vs Capitalismo Dona*. Colombia: Universidad del Quindío, 2023.

[6] K. Raworth, *Doughnut Economics: Seven Ways to Think Like a 21st-century Economist*, USA: Random House Business Books, 2018.



